

Основы математической обработки информации

Учебное пособие

составители: Смирнов М.А., Беккерман Е.Н., Литвинова А.В., Пьяных Е.Г., Лобода Ю.О.

Томск - 2012

Оглавление

1. Роль математики в современном мире.....	4
2. Числа.....	6
Виды чисел.....	6
Системы счисления.....	7
3. Аксиоматический метод.....	7
4. Математическая логика.....	10
Высказывания.....	10
Операции над высказываниями.....	11
Составные высказывания, логические формулы.....	14
Таблицы истинности и равносильные преобразования.....	15
5. Множества и отношения.....	18
Множества и подмножества.....	18
Операции над множествами.....	22
Бинарные отношения.....	24
6. Комбинаторика.....	29
Общие правила комбинаторики.....	29
Схема выбора, приводящая к размещениям (без повторений).....	29
Схема выбора, приводящая к перестановкам (без повторений).....	29
Схема выбора приводящая к сочетаниям (без повторений).....	30
7. Элементы теории вероятностей и математической статистики.....	30
Случайные события и операции над ними.....	30
Вероятность случайных событий.....	32
Операции над вероятностями.....	33
8. Элементы математической статистики.....	34
Алгоритм построения интервального вариационного ряда.....	35
Основные характеристики вариационного ряда.....	36
9. Математические модели.....	39
Эвристические модели.....	40
Математические модели.....	41
Разновидности моделирования.....	41
Классификация математических моделей.....	43
Литература.....	45

Введение

Учебное пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы математической обработки информации». Цель изучения данной дисциплины - формирование системы знаний, умений и навыков, связанных с особенностями математических способов представления и обработки информации как базы для развития универсальных компетенций и основы для развития профессиональных компетенций.

Задачи изучения дисциплины включают:

- формирование системы знаний и умений, связанных с представлением информации с помощью математических средств;
- актуализацию межпредметных знаний, способствующих пониманию особенностей представления и обработки информации средствами математики;
- ознакомление с основными математическими моделями и типичными для соответствующей предметной области задачами их использования;
- формирование системы математических знаний и умений, необходимых для понимания основ процесса математического моделирования и статистической обработки информации в профессиональной области;
- обеспечение условий для активизации познавательной деятельности студентов и формирования у них опыта математической деятельности в ходе решения прикладных задач, специфических для области их профессиональной деятельности;
- стимулирование самостоятельной, деятельности по освоению содержания дисциплины и формированию необходимых компетенций.

Материал учебного пособия разбит на разделы, которые в свою очередь, разделены на темы. При формировании содержания учебного пособия авторы частично использовали со ссылками фрагменты работ – В.Я. Турецкого, Н.Л. Стефанова, В.Н. Козлова, А.В. Могилева, С.Ю. Жолкова, В.А. Власова, Ф.И.Перегудова.

Учебное пособие по курсу «Основы математической обработки информации» ставит целью помочь студентам дневного, заочного и дистанционного обучения в освоении курса. Для эффективного освоения курса совместно с данным учебным пособием рекомендуется использовать в работе учебно-методическое пособие «Основы математической обработки информации».

1. Роль математики в современном мире

Математика является значительной и важной частью общечеловеческой культуры. Накопление математических фактов на протяжении тысячелетий развития человечества привело к возникновению математики как науки около двух с половиной тысяч лет тому назад. Обращаясь к истории философии, следует отметить, что ученые, создававшие математику, рассматривали ее как составную часть философии, которая служила средством познания мира. Не случайно, квадривий, изучавшийся в Древней Греции, включал в себя арифметику, геометрию, астрономию и музыку. О значении математики для человечества говорит и тот факт, что книга Евклида "Начала" издавалась наибольшее число раз (не считая Библии).

Математика имеет богатейшие возможности воздействия на выработку научного мировоззрения и достижение необходимого общекультурного уровня. Пытаясь объяснить окружающий мир, задавая вопрос "почему?", древние философы-софисты пришли к необходимости выделения математических знаний в самостоятельную науку.

Логические рассуждения представляют собой один из методов математики. Поэтому ее изучение формирует логическое мышление, позволяет правильно устанавливать причинно-следственные связи, что, безусловно, должен уметь каждый человек. Стиль изложения математики, ее язык оказывают влияние на развитие речи. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие. Речь идет именно об основных понятиях и идеях, а не о наборе конкретных формул и теорем.

Математика уверенно расположилась в самых разных частях и уголках современного мира. Что же дает людям математика, которая не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия? Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости, и начало нового этапа ее дальнейшего развития?

Наиболее распространенный ответ на эти вопросы еще не так давно состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет осуществлять математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики, особенно в последние годы в связи с бурным ростом вычислительной техники, он оказывается неглавным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Главная же причина этого процесса такова: математика предлагает весьма общие и достаточно четкие логические модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей других наук. Объектами исследования математики служат логические модели, построенные для описания явлений в природе, технике, обществе. Математической моделью изучаемого объекта (явления, процесса и т.п.) называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. При этом математическая модель, отображая и воспроизводя те или иные стороны рассматриваемого объекта, способна замещать его так, что исследование модели даст новую информацию об этом объекте, опирающуюся на принципы математической теории, на сформулированные математическим языком законы природы. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и необнаруженные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, возникающих при исследовании этого явления. Такие модели формулируются на особом языке — языке чисел, различных символов.

Научное изложение должно быть ясным, точным, вполне определенным и кратким. Язык науки не должен создавать дополнительные трудности при восприятии сообщаемой информации, должен доносить идеи и факты в однозначном, не допускающем разночтения виде. Именно поэтому в науке должен применяться особый язык, максимально точно передающий присущие ей особенности. Кроме того, этот язык должен обладать свойством универсальности для применения в различных научных отраслях. Таким языком и является математика.

Математическая символика не только не оставляет места для неточности выражения мысли и расплывчатого толкования написанного, но вдобавок позволяет автоматизировать проведение тех действий, которые необходимы для получения выводов. Математическая символика выполняет и ряд других очень важных функций: сжимать запись информации, делать ее легко обозримой, удобной для последующей обработки и получения выводов. Обширные статистические сведения, собранные в результате эксперимента, удается посредством таблиц и аналитических формул сжать до весьма короткой записи.

Итак, математика позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на чисто качественных (а значит, приблизительных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. Не случайно говорят, что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика.

Владение математикой дает людям мощные методы изучения и познания окружающего их мира, методы исследования как теоретических, так и практических проблем. Использование математического моделирования, дедуктивных методов и специального математического аппарата сближает гуманитарные и естественные науки. Одним из основных стимулов интеграции естественных и гуманитарных наук является математизация гуманитарных наук. Прежде в гуманитарных науках редко использовался дедуктивный вывод (один из признаков научности), считавшийся у математиков единственно приводящим к «истинному» доказательству. Сегодня он используется в рамках многих гуманитарных наук. Наблюдается и обратное явление. В математику проникают подходы и методы гуманитарных наук. Примером тому может являться теория нечетких множеств.

Широкое проникновение математики и ее методов в другие отрасли знания является главнейшей формой взаимодействия наук, способствует сближению различных отраслей знания. Так, например, связь между физикой и химией очень часто осуществляется через математику. Математика изучает количественные закономерности, присущие всем предметам, явлениям действительности, и поэтому является необходимой всем областям знаний. Математика дает им мощный вычислительный аппарат, язык формул и т.д., без которых науки не могут развиваться успешно.

На стыке математики и наук, где она применяется, возникают новые отрасли знания: математическая физика, математическая логика, математическая биология, математическая лингвистика, математическая психология и другие науки. Число таких отраслей знания в наше время постоянно растет.

Одной из особенностей математизации знаний является ее универсальность, состоящая в том, что математические методы в наше время проникают во все сферы жизни людей. Люди в своей повседневной деятельности постоянно пользуются понятиями и выводами математики, нередко даже не задумываясь об этом. В современном производстве, в технике математика применяется особенно широко. Без всякого преувеличения можно сказать, что ни одно современное техническое усовершенствование невозможно без более или менее сложных математических расчетов.

Связь математики с материальным производством можно обнаружить на всех этапах развития человечества. При этом чем шире и разнообразнее практическая деятельность людей, тем шире и разнообразнее требования к математике, тем необходимее становится ее

применение. Связь математики с производственной деятельностью человека имеет тенденцию к усложнению, становится многоступенчатой.

Таким образом, по мере усложнения задач, которые решает общество, возрастает роль математики.

2. Числа

Виды чисел

Цифра. Число — основное понятие математики. Числа записываются при помощи *цифр*. Слово «цифра» происходит от арабского «цифр» — пустое место. Вплоть до XVIII века наш нуль назывался «цифрой», а в английском языке до сих пор одно из значений слова «цифра» (cipher) — нуль. Обычно используют 10 арабских цифр 1—9, 0.

Века, года н. э., месяцы при указании дат и порядковые числительные могут записываться римскими цифрами. *Римские цифры* — особые знаки для десятичных разрядов $I = 1$, $X = 10$, $C = 100$, $M = 1000$ и их половин $V = 5$, $L = 50$, $D = 500$. Числа записывают при помощи повторения римских цифр, используя два правила: 1) если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения). Например, $II = 2$, $III = 3$, $VI = 6$; 2) если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Но последнее правило применяется только во избежание четырехкратного повторения одной и той же цифры. Например, $IV = 4$, $IX = 9$, $XL = 40$.

Натуральное число.

Натуральные числа, или натуральный ряд — это числа 1, 2, 3 и т. д. до бесконечности. Обозначение натурального ряда: \mathbb{N} .

Натуральные числа обладают следующими важными свойствами: 1) следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением 1; 2) натуральных чисел бесконечно много; 3) не существует самого большого натурального числа.

Случайные числа.

Для проведения подобных экспериментов используют случайные числа. *Случайные числа* — упорядоченное множество цифр, полученных в результате какого-либо случайного процесса.

Последовательности случайных чисел могут быть любой конечной длины. Опубликованы таблицы с миллионом случайных чисел. Сейчас случайные числа получают на компьютере сразу при решении задач.

Большинство таблиц случайных чисел строится случайной выборкой в пространстве элементарных событий $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. В приложении 1 приведена таблица случайных чисел.

Пример. Четверо юношей приобрели доску и костюмы для виндсерфинга, причем Саша внес 10% стоимости комплекта, Боря внес 20%, Витя — 30% и Гена — 40%. 8 марта каждый из них хотел бы воспользоваться комплектом, и они решают бросить жребий так, чтобы их шансы были равны той части стоимости комплекта, которую они внесли. Построим пространство событий, состоящее из 4 событий с вероятностями 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4. Для этого один из юношей с завязанными глазами ставит точку в таблицу случайных чисел. Отметим число, расположенное ближе всех к этой точке. Если это 0, то комплект получит Саша, если 1 или 2 — Боря, если 3, 4 или 5 — Витя, если 6, 7, 8 или 9 — Гена.

Действительное число

Целые числа — это числа вида n , $-n$ и 0 , где n — натуральное число. Обозначение: \mathbb{Z} . Все целые числа можно записать так: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что любое натуральное число является также и целым.

Рациональные числа — это числа вида p/q , где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. Обозначение: \mathbb{Q} . Примеры: $-1, -2/3, -1/2, -1/4, 0, 1/2, 2/3, 1/4, 1$. Очевидно, что любое целое число является рациональным.

Действительные, или вещественные, числа, или континуум, получают из рациональных чисел с помощью некоего предельного процесса. Это — наши обычные числа. Обозначение: \mathbb{R} . Рациональное число — всегда действительное.

Действительные, но не рациональные числа называются **иррациональными числами**. Обозначение: \mathbb{I} . Примеры: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, e, \ln 10, \sin 1$.

Алгебраические числа \mathbb{A} — корни многочленов с целыми коэффициентами. Корень квадратного двучлена $x^2 - 2$ — число $\sqrt{2}$. Рациональное число — частный случай алгебраического. Примеры: $-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.

Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, называются **трансцендентными числами**. Обозначение: \mathbb{T} . Например: $e, \ln 10, \sin 1$.

Системы счисления

Десятичная система счисления.

Система приемов представления натуральных чисел называется **счислением, или нумерацией**.

Римское счисление — **непозиционное**, т. к. в записи числа каждая цифра имеет одно и то же значение: цифра I всегда означает 1, цифра X — 10 и т. д.

Если же значение цифры зависит от ее расположения в записи числа, то система счисления — **позиционная**. Количество цифр позиционной системы счисления называется ее **основанием**, по которому и именуют систему.

Обычная система счисления — позиционная и **десятичная**, т. е. состоит из 10 разных цифр. Значение цифры зависит от ее положения в записи числа. Например, если цифра 1 стоит в числе справа, то она значит 1, если на 2-м месте справа, то 10, а на 3-м месте — 100.

Недесятичные системы счисления. Компьютеры в своей работе пользуются **двоичной системой счисления**, т. е. позиционной системой счисления, состоящей из двух цифр 0 и 1. Арифметические операции в этой системе выполняются особенно просто.

Программисты используют также позиционную **шестнадцатеричную систему счисления**, имеющей цифры 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F.

3. Аксиоматический метод

Определение из математической энциклопедии

«АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые **аксиомами** теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом.»

В математике аксиоматический метод (А. м.) зародился в работах древнегреческих геометров. Блестящим, остававшимся единственным вплоть до 19 в. образцом применения А. м. была геометрическая система, известная под названием «Начал» Евклида (ок. 300 до н. э.). Хотя в то время не вставал еще вопрос об описании логических средств, применяемых для

извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида уже достаточно четко проведена идея получения всего основного содержания геометрич. теории чисто дедуктивным путем из нек-рого, относительно небольшого, числа утверждений — аксиом. истинность к-рых представлялась наглядно очевидной.

Открытие в нач. 19 в. неевклидовой геометрии И. Н. И. Лобачевским и Я. Больяй (J. Bolyai) явилось толчком к дальнейшему развитию А. м. Они установили, что, заменив привычный и, казалось бы, единственно «объективно истинный» V постулат Евклида о параллельных его отрицанием, можно развивать чисто логическим путем геометрическую теорию, столь же стройную и богатую содержанием, как и геометрия Евклида. Этот факт заставил математиков 19 в. обратить специальное внимание на дедуктивный способ построения математической теории, что повлекло за собой возникновение новой проблематики, связанной с самим понятием А. м., и формальной (аксиоматической) математической теории. По мере того как накапливался опыт аксиоматического изложения математических теорий — здесь надо отметить прежде всего завершение логически безупречного (в отличие от «Начал» Евклида) построения элементарной геометрии [М. Паш (M. Pasch), Дж. Пеано (G. Peano), Д. Гильберт (D. Hilbert)] и первые попытки аксиоматизации арифметики (Дж. Пеано), — уточнялось понятие формальной аксиоматической системы (см. ниже); возникала специфическая проблематика, на основе к-рой выросла так называемая *доказательств теория* как основной раздел современной математической логики.

Подробнее...

Аксиоматический метод появился в Древней Греции, а сейчас применяется во всех теоретических науках, прежде всего в математике.

Аксиоматический метод построения научной теории заключается в следующем: выделяются основные понятия, формулируются аксиомы теории, а все остальные утверждения выводятся логическим путём, опираясь на них.

Основные понятия выделяются следующим образом. Известно, что одно понятие должно разъясняться с помощью других, которые, в свою очередь, тоже определяются с помощью каких-то известных понятий. Таким образом, мы приходим к элементарным понятиям, которые нельзя определить через другие.

Эти понятия и называются основными. Когда мы доказываем утверждение, теорему, то опираемся на предпосылки, которые считаются уже доказанными. Но эти предпосылки тоже доказывались, их нужно было обосновать. В конце концов, мы приходим к недоказываемым утверждениям и принимаем их без доказательства. Эти утверждения называются аксиомами. Набор аксиом должен быть таким, чтобы, опираясь на него, можно было доказать дальнейшие утверждения. Выделив основные понятия и сформулировав аксиомы, далее мы выводим теоремы и другие понятия логическим путём. В этом и заключается логическое строение геометрии. Аксиомы и основные понятия составляют основания планиметрии.

Так как нельзя дать единое определение основных понятий для всех геометрий, то основные понятия геометрии следует определить как объекты любой природы, удовлетворяющие аксиомам этой геометрии. Таким образом, при аксиоматическом построении геометрической системы мы исходим из некоторой системы аксиом, или аксиоматики. В этих аксиомах описываются свойства основных понятий геометрической системы, и мы можем представить основные понятия в виде объектов любой природы, которые обладают свойствами, указанными в аксиомах. После формулировки и доказательства первых геометрических утверждений становится возможным доказывать одни утверждения (теоремы) с помощью других. Доказательства многих теорем приписываются Пифагору и Демокриту.

Гиппократу Хиосскому приписывается составление первого систематического курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс и его последующие

обработки назывались "Элементы".

Потом, в III в. до н.э., в Александрии появилась книга Евклида с тем же названием, в русском переводе "Начала". От латинского названия "Начал" произошёл термин "элементарная геометрия". Несмотря на то, что сочинения предшественников Евклида до нас не дошли, мы можем составить некоторое мнение об этих сочинениях по "Началам" Евклида. В "Началах" имеются разделы, логически весьма мало связанные с другими разделами. Появление их объясняется только тем, что они внесены по традиции и копируют "Начала" предшественников Евклида. "Начала" Евклида состоят из 13 книг. 1 – 6 книги посвящены планиметрии, 7 - 10 книги об арифметике и несоизмеримых величинах, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Книги с 11 по 13 были посвящены стереометрии.

"Начала" начинаются с изложения 23 определений и 10 аксиом. Первые пять аксиом - "общие понятия", остальные называются "постулатами". Первые два постулата определяют действия с помощью идеальной линейки, третий – с помощью идеального циркуля.

Четвёртый, "все прямые углы равны между собой", является излишним, так как его можно вывести из остальных аксиом.

Последний, пятый постулат гласил: "Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то, при неограниченном продолжении этих двух прямых, они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых".

Пять "общих понятий" Евклида являются принципами измерения длин, углов, площадей, объёмов: "равные одному и тому же равны между собой", "если к равным прибавить равные, суммы равны между собой", "если от равных отнять равные, остатки равны между собой", "совмещающиеся друг с другом равны между собой", "целое больше части".

Далее началась критика геометрии Евклида. Критиковали Евклида по трём причинам: за то, что он рассматривал только такие геометрические величины, которые можно построить с помощью циркуля и линейки; за то, что он разрывал геометрию и арифметику и доказывал для целых чисел то, что уже доказал для геометрических величин, и, наконец, за аксиомы Евклида. Наиболее сильно критиковали пятый постулат, самый сложный постулат Евклида. Многие считали его лишним, и что его можно и нужно вывести из других аксиом. Другие считали, что его следует заменить более простым и наглядным, равносильным ему: "Через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую".

Критика разрыва между геометрией и арифметикой привела к расширению понятия числа до действительного числа. Споры о пятом постулате привели к тому, что в начале XIX века Н. И. Лобачевский, Я. Бойяи и К. Ф. Гаусс построили новую геометрию, в которой выполнялись все аксиомы геометрии Евклида, за исключением пятого постулата. Он был заменён противоположным утверждением: "В плоскости через точку вне прямой можно провести более одной прямой, не пересекающей данную". Эта геометрия была столь же непротиворечивой, как и геометрия Евклида. Модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости была построена французским математиком Анри Пуанкаре в 1882 г.

На евклидовой плоскости проведём горизонтальную прямую. Эта прямая называется абсолютом (x). Точки евклидовой плоскости, лежащие выше абсолюта, являются точками плоскости Лобачевского. Плоскостью Лобачевского называется открытая полуплоскость, лежащая выше абсолюта.

Неевклидовы отрезки в модели Пуанкаре - это дуги окружностей с центром на абсолюте или отрезки прямых, перпендикулярных абсолюту (AB, CD). Фигура на плоскости Лобачевского - фигура открытой полуплоскости, лежащей выше абсолюта (F). Неевклидово движение является композицией конечного числа инверсий с центром на абсолюте и осевых симметрий, оси которых перпендикулярны абсолюту. Два неевклидовых отрезка равны, если

один из них неевклидовым движением можно перевести в другой. Таковы основные понятия аксиоматики планиметрии Лобачевского.

Все аксиомы планиметрии Лобачевского непротиворечивы. Определение прямой следующее: "Неевклидова прямая - это полуокружность с концами на абсолюте или луч с началом на абсолюте и перпендикулярный абсолюту". Таким образом, утверждение аксиомы параллельности Лобачевского выполняется не только для некоторой прямой a и точки A , не лежащей на этой прямой, но и для любой прямой a и любой не лежащей на ней точки A . За геометрией Лобачевского возникли и другие непротиворечивые геометрии: от евклидовой отделилась проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, возникла риманова геометрия (общая теория пространств с произвольным законом измерения длин) и др. Из науки о фигурах в одном трёхмерном евклидовом пространстве геометрия за 40 - 50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чём-то сходных со своей прародительницей - геометрией Евклида. 60 896

4. Математическая логика

Математическая логика — это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логические операции над ними.

Вопрос доказательства корректности рассуждений исследовался человечеством с древних времен первоначально в рамках традиционной логики великим древнегреческим ученым Аристотелем. В середине XIX века английский математик Джордж Буль предложил подход к изучению данного вопроса средствами математики. Эту отрасль науки часто называют формальной логикой потому, что вывод о корректности (истинности) цепи рассуждений здесь делается на основании формы (а не содержания) этих рассуждений. Все высказывания рассматриваются исключительно с точки зрения их истинностного значения. Несколько сузив область проблем, рассматриваемых математической логикой, можно сказать, что главная ее цель состоит в том, чтобы дать точное определение понятия «математическое доказательство».

Высказывания

Основным понятием математической логики является понятие высказывания. Согласно толковому словарю высказывание — это фраза, высказанная словами; высказанное суждение. В филологии под высказыванием понимается интонационно оформленная синтаксическая единица, содержащая сообщение. Иной смысл имеет понятие высказывания в математической логике.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Например, высказываниями являются следующие предложения:

Луна — спутник Земли;

белые медведи живут в Африке;

диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

$$2 + 2 = 4 ;$$

Следующие предложения высказываниями не являются:

Стой! Куда идешь?

Маслины вкуснее ананасов;

x — четное число;

У него голубые глаза.

Вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями, поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла. Предложения типа "маслины вкуснее ананасов" выражают субъективное мнение говорящего, и так же не могут считаться высказываниями. Предложение "у него голубые глаза" не является высказыванием, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно человеке идет речь. То же можно сказать и о высказываниях « x — четное число ». Необходимо знать, чему равно x .

Математическая логика рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным. Поэтому будем обозначать высказывания большими латинскими буквами: a, b, c_1 и т.д.

Запись $a=1$ означает, что высказывание a истинно.

Запись $b=0$ означает, что b ложно.

Например, если a — это высказывание «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны», а b — «Число 100 является корнем уравнения $x^2+1=0$ », то $a=1$, а $b=0$.

Операции над высказываниями

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания «не», «и», «или», «если... , то...», «...тогда и только тогда...» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются «логическими связками».

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными. В алгебре логики логическим связкам соответствуют логические операции. Высказывания соединяются символами логических операций, в результате этих операций получаются новые высказывания. Перечислим основные логические связки.

Отрицание	\bar{a}	«не a », «неверно, что a »
Конъюнкция	$a \wedge b$	« a и b », « a , но b »
Дизъюнкция	$a \vee b$	« a или b », «хотя бы одно из двух: a или b »
Импликация	$a \Rightarrow b$	« a влечет b », «если a , то b », «для a необходимо b », « a достаточно для b »
Эквиваленция (эквивалентность)	$a \Leftrightarrow b$	« a эквивалентно b », « a равносильно b », « a тогда и только тогда, когда b », «для a необходимо и достаточно b »

Здесь слева — название логической операции, в середине — ее обозначение, справа — аналог в естественной речи.

Так, например, из элементарных высказываний "Петров — врач", "Петров — шахматист" при помощи связки "и" можно получить составное высказывание "Петров — врач и шахматист", понимаемое как "Петров — врач, хорошо играющий в шахматы". Если первое высказывание обозначить a , а второе b , то составное высказывание можно будет записать как $a \wedge b$

При помощи связки "или" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "Петров — врач или шахматист", понимаемое в алгебре логики как "Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно", которое можно записать так: $a \vee b$

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний. Эту зависимость отражают в виде таблиц истинности.

Определение. Отрицанием высказывания a называется новое высказывание, которое обозначается \bar{a} и является истинным, если a ложно, и ложно, если a истинно.

a	\bar{a}
0	1
1	0

Например, если высказывание a «Лев Толстой — автор романа «Война и мир»», то \bar{a} — это высказывание «Лев Толстой — не является автором романа «Война и мир»». Если a — это высказывание «Треугольник ABC является остроугольным», то \bar{a} — это высказывание «Треугольник ABC не является остроугольным» или «Треугольник ABC является тупоугольным или прямоугольным».

Определение. Конъюнкцией высказываний a и b называется новое высказывание, которое обозначается $a \wedge b$ и является истинным только в случае, когда истинны оба высказывания a и b , в остальных случаях ложно.

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, высказывание « $2 \times 2 = 4$ и белые медведи живут в Африке » ложно.

Известная из школьной математики запись « $3 \leq x < 7$ » является конъюнкцией двух высказываний: « $3 \leq x$ » и « $x < 7$ ». Если $x = 5$, то оба элементарных высказывания, входящих в это составное высказывание истинны, значит и составное также истинно.

Определение. Дизъюнкцией высказываний a и b называется новое высказывание, которое обозначается $a \vee b$ и является ложным только в случае, когда ложны оба высказывания a и b , в остальных случаях истинно.

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Например, высказывание « $2 \times 2 = 4$ и белые медведи живут в Африке » истинно.

Союз «или» в русском языке может использоваться в двух смыслах: исключаящем и неисключаящем. Рассмотрим два высказывания: «Студенты готовятся к экзаменам по конспектам или по учебникам», «Сегодня в 19 часов я пойду в кино или в театр». В первом случае подготовка к экзамену по конспектам не исключает использования учебника и наоборот. Во втором случае может реализоваться только одна альтернатива: кино или театр.

В алгебре логики союз или используется в неисключающем смысле.

Определение. Импликацией высказываний a и b называется новое высказывание, которое обозначается $a \Rightarrow b$ и является ложным только в случае, когда из истины следует ложь, в остальных случаях истинно.

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Проиллюстрируем операцию импликации на следующем примере. Отец сказал сыну: «Если я получу премию, то куплю тебе велосипед». Обозначим через a высказывание «Я получу премию», через b — «Я куплю велосипед». Тогда обещание отца запишем так: $a \Rightarrow b$. Если ребенок будет считать, что отец выполнил обещание, то целесообразно считать высказывание $a \Rightarrow b$ истинным, если нарушил обещание — ложным. Рассмотрим варианты:

получена премия, куплен велосипед $a=1$ $b=1$ — обещание выполнено;
 не получена премия, велосипед не куплен $a=0$ $b=0$ — обещание выполнено;
 не получена премия, велосипед куплен $a=0$ $b=1$ — поступок отца не кажется ребенку нарушением обещания, то есть обещание выполнено;
 получена премия, велосипед не куплен $a=1$ $b=0$ — ребенок считает себя обманутым, то есть обещание не выполнено.

В обычной речи мы привыкли, что высказывание «из a следует b » предполагает, что между высказываниями a и b существует смысловая связь. С точки зрения математической логики следование из одного высказывания другого по смыслу совсем не обязательно. Определение позволяет рассматривать импликацию любых двух высказываний и определять ее логическое значение. Это еще раз подтверждает формальный характер построения высказываний, изучаемых в логике.

Например, высказывание «Если $2 \times 2 = 4$, то белые медведи живут в Африке» ложно, а высказывание «Если белые медведи живут в Африке, то $2 \times 2 = 4$ » истинно.

В виде импликации формулируется большинство математических теорем. Например: «Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны».

Операция импликации также выражает зависимости в форме "необходимости" или "достаточности". Выражение $a \Rightarrow b$ в этом случае читается как 1) "для того, чтобы a было истинным, необходимо, чтобы b было истинным" либо 2) "для того, чтобы b было истинным, достаточно, чтобы a было истинным". Пусть a — "мы поднимаемся на Эйфелеву башню", b — "мы находимся в Париже". Действительно, 1) чтобы подняться на Эйфелеву башню, необходимо находиться в Париже, 2) если мы поднялись на Эйфелеву башню, этого достаточно, чтобы сделать вывод о том, что мы находимся в Париже. Применительно к таблице истинности импликации это означает следующее 1) если a — истина, то результат импликации — истина, если b — истина, и ложь, если b — ложь (для истинности выражения в целом при условии истинности аргумента a определяющим (необходимым) является значение аргумента b), 2) если результат импликации — истина и a — истина, то b — истина (в случае истинности выражения в целом истинность аргумента a влечет за собой истинность аргумента b (достаточна для истинности аргумента b)).

Определение. Эквиваленцией высказываний a и b называется новое высказывание, которое обозначается $a \Leftrightarrow b$ и является ложным только в случае, когда истинность входящих в него элементарных высказываний не совпадает, и истинным, если совпадает.

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, высказывание « $2 \times 2 = 4$ тогда и только тогда, когда белые медведи живут в Африке» ложно, а высказывание « $2 \times 2 = 5$ тогда и только тогда, когда белые медведи живут в Африке» истинно.

Приведенный пример показывает, что операцией эквиваленции могут быть соединены любые, даже независимые друг от друга по смыслу высказывания.

В виде эквиваленции также часто формулируются математические теоремы.

Например, «Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам».

Составные высказывания, логические формулы

В естественном языке с помощью логических связок мы можем строить довольно длинные и сложные предложения. Так же и в алгебре логики можно рассматривать высказывания, состоящие из простых или составных высказываний, соединенных между собой логическими операциями.

Определение. Запись составного высказывания в виде простых высказываний, соединенных логическими связками, называется логической формулой.

Простые высказывания в этом случае обозначаются, как и ранее, латинскими буквами. Формулы будем обозначать большими буквами греческого алфавита, иногда с использованием индексов: $\Phi(a, b)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ и тд.

Например, логической формулой высказывания «Если мы поедим в Париж, то поднимемся на Эйфелеву башню и прогуляемся по набережной Сены» является $\Phi(a, b, c) = a \Rightarrow (b \wedge c)$, запись $\Phi(a, b, c)$ означает, что формула содержит простые высказывания a, b, c .

Ясно, что для того, чтобы правильно составлять и интерпретировать сложные высказывания необходимо знать порядок действий, то есть приоритеты логических операций. Приоритеты логических операций следующие: сначала выполняется операция отрицания, затем конъюнкция и дизъюнкция (они имеют одинаковый приоритет), затем импликация и в последнюю очередь — эквиваленция. Чтобы изменить этот порядок в математике традиционно используются скобки. Для уменьшения числа скобок можно опустить знак конъюнкции (так же как мы привыкли делать это со знаком умножения) и не заключать в скобки конъюнкцию нескольких элементарных высказываний. Так, например вместо формулы $(a \wedge b) \vee (c \wedge d \wedge f)$ можно записать $ab \vee cdf$. Однако, при эквивалентных преобразованиях необходимо следить, чтобы порядок действий, а

следовательно и результат, не изменялись, и не забывать ставить в нужных местах скобки.

Как показывает анализ формулы $\Phi(a, b, c) = a \Rightarrow (b \wedge c)$, при определённых сочетаниях значений переменных a, b, c она принимает значение "истина", а при некоторых других сочетаниях — значение "ложь", такие формулы называются выполнимыми.

Таблицы истинности и равносильные преобразования

Зависимость значения формулы от набора значений переменных удобно показывать с помощью таблицы истинности. Таблица истинности логической формулы выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы.

Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре:

0	0
0	1
1	0
1	1

Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Удобной формой записи при нахождении значений формулы является таблица, содержащая значения переменных и все промежуточные результаты. В левой части таблицы перечислены всевозможные сочетания значений логических переменных, затем в столбцах выписаны промежуточные результаты действий над этими значениями в порядке, определенном приоритетом операций. Последний столбец – результат выполнения формулы для соответствующих (находящихся в той же строке) значений элементарных высказываний.

Если логическая формула содержит n элементарных высказываний и m операций над ними, то таблица истинности будет иметь размер $(2^n + 1) \times (n + m)$. Приведем таблицу истинности для формулы $\Phi(a, b, c) = a \Rightarrow (b \wedge c)$. В формуле $\Phi(a, b, c)$ три элементарных высказывания и два действия, поэтому таблица будет 9×5

a	b	c	$b \wedge c$	$a \Rightarrow (b \wedge c)$
0	0	0	0	1

a	b	c	$b \wedge c$	$a \Rightarrow (b \wedge c)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Некоторые формулы принимают значение "истина" при любых значениях истинности входящих в них переменных. Таковой будет, например, формула $a \vee \bar{a}$, соответствующая высказыванию "Эти прямые пересекаются или не пересекаются". Эта формула истинна и тогда, когда прямые пересекаются и тогда, когда они параллельны. Такие формулы называются тождественно истинными формулами или *тавтологиями*.

Определение. Формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ называется тавтологией или тождественно истинной формулой, если при любых значениях истинности высказываний x_1, \dots, x_n значение $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 1$.

В качестве другого примера рассмотрим формулу $a \wedge \bar{a}$, которой соответствует, например, высказывание "Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати". Очевидно, что эта формула ложна, так как либо a , либо \bar{a} обязательно ложно. Такие формулы называются тождественно ложными формулами или *противоречиями*.

Определение. Формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ называется противоречием или тождественно ложной формулой, если при любых значениях истинности высказываний x_1, \dots, x_n значение $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

В обычной речи мы часто можем выразить одно и то же суждение при помощи различных фраз. В математике различные математические выражения приводят к одному и тому же числу (результату). Такие выражения называют равными. Две различные логические формулы могут принимать одинаковые значения при одинаковых значениях переменных.

Если две формулы A и B одновременно, то есть при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются равносильными.

Определение. Формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ и $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ называются равносильными, если при соответствующих значениях истинности высказываний x_1, \dots, x_n значения истинности формул Φ и Ψ совпадают. Равносильность формул обозначается $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1, \dots, x_n)$.

Для доказательства равносильности двух формул достаточно составить их таблицы истинности и убедиться, что результирующие столбцы совпадают.

В математической логике существуют основные равносильные формулы, которые называются законами математической логики. Большинство из них аналогичны для операций конъюнкции и дизъюнкции, поэтому удобно привести их в таблице:

Название	Для дизъюнкции	Для конъюнкции
коммутативный (переместительный)	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
ассоциативный (сочетательный)	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
дистрибутивный (распределительный)	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
правила деМоргана	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$	$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
идемпотенции	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
поглощения	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
склеивания	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$	$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a$
с инверсией	$a \vee \bar{a} = 1$	$a \wedge \bar{a} = 0$
с тавтологией	$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 1 = a$
с противоречием	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 0 = 0$
двойного отрицания	$\bar{\bar{a}} = a$	

Любой из законов математической логики можно доказать, используя таблицу истинности. Докажем, например, правило деМоргана для дизъюнкции:

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	\bar{a}	\bar{b}	$\bar{a} \wedge \bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Используя законы математической логики, можно упрощать формулы путем последовательных равносильных преобразований. Равносильные преобразования логических формул имеют то же назначение, что и преобразования формул в обычной алгебре.

Под упрощением формулы понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая либо содержит по сравнению с исходной меньшее число операций либо содержит меньшее число переменных.

В каждой составной формуле можно выделить более простые подформулы. Подформулой называется такая часть формулы, которая сама является формулой. Если подформулу заменить на равносильную ей подформулу, то полученная в результате такой замены формула будет равносильна исходной. Подформулу можно заключить в скобки, не нарушив порядка выполнения действий в общей формуле.

Пять логических операций, которые были нами определены, не являются независимыми. Существуют равносильные формулы, позволяющие представить операции импликации и эквиваленции с помощью конъюнкции дизъюнкции и отрицания:

$$a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$$

$$a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

Эти равносильности можно проверить при помощи таблиц истинности.

Зная эти формулы, можно привести любую формулу математической логики к виду, когда в ней используются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания над элементарными высказываниями. А к таким формулам можно применять законы математической логики, приведенные в таблице.

Например, $a \Leftrightarrow b$ можно заменить в формулах на $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$, а выражение $(a \Rightarrow b)$ – на $(\bar{a} \vee b)$ (это можно проверить с помощью таблиц истинности). Таким образом:

$$(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)$$

Дважды применив дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции, получим:

$$\begin{aligned} ((\bar{a} \vee b) \wedge \bar{b}) \vee ((\bar{a} \vee b) \wedge a) &= (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge a) \vee (b \wedge a) = \\ &= (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee 0 \vee 0 \vee (b \wedge a) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge a) \end{aligned}$$

Таким образом

$$(a \Leftrightarrow b) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge a) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a) .$$

В результате подобных преобразований любая формула может быть приведена к виду, когда в ней используются только операции (\neg, \wedge, \vee) .

Далее, формула $a \vee b = \overline{(\bar{a} \wedge \bar{b})}$ позволяет сократить количество операций до двух: (\neg, \wedge) , так что каждая логическая формула может быть также преобразована в равносильную формулу, содержащую только отрицание и конъюнкцию. Аналогично, формула $a \wedge b = \overline{(\bar{a} \vee \bar{b})}$, поэтому каждая логическая формула может быть преобразована в равносильную формулу, содержащую только отрицание и дизъюнкцию (\neg, \vee) . Можно указать так же формулы, которые приводят к операциям (\neg, \Rightarrow) .

Алгебре логики присуще приведение формул к виду, содержащему только операции (\neg, \wedge, \vee) .

5. Множества и отношения

Множества и подмножества

Понятие "множество" является базовым для большинства математических теорий. Так как элементами множеств могут быть предметы различной природы, то одни и те же утверждения относительно множеств можно истолковать и как утверждения о натуральных числах, и как утверждения о точках геометрических фигур, и как утверждения о животных или растениях, и как утверждения об атомах или молекулах.

Понятию множества нельзя дать строгого определения. Любые попытки дать строгое определение множества приводили к логическому противоречию. Основатель теории Георг Кантор описывал это понятие следующим образом:

Множество A есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимое как единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества A .

Множества обозначают прописными латинскими буквами: A , B , C , и т. д. Элементы множеств обозначают строчными латинскими буквами a , b , c . Тот факт, что некоторый объект a принадлежит множеству A обозначается следующим образом:

$a \in A$. То, что объект b не является элементом множества A , записывают так: $b \notin A$.

Обсудим основные моменты этого "определения".

"Мыслимое как единое целое": собрание объектов (элементов множества) рассматривается как единое целое, совокупность. "Жильцы дома 5 по проспекту Мира", "атомы водорода в мировом океане", "виды перелетных птиц, обитающих в Томской области", "дисциплины, изучаемые студентами в период обучения в вузе".

"Объекты нашей интуиции и интеллекта": эта формулировка не накладывает никаких ограничений на природу элементов множества. Это может быть, например, множество студентов 1-го курса, множество семян в подсолнухе, множество зеленых яблок в вазе, множество слов в поэме "Евгений Онегин" или множество слов в ее названии, множество звезд на небе, множество прямоугольных треугольников на плоскости и т.д.

В математике обычно имеют дело с множествами математических объектов: чисел, точек, кривых и т.д. Для числовых множеств имеются общепринятые обозначения:

\mathbb{N} - множество натуральных чисел, то есть чисел, которые используются для счета предметов $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

\mathbb{Z} - множество целых чисел, это все натуральные числа, ноль, и числа вида $-n$, где $n \in \mathbb{N}$ $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Q} - множество рациональных чисел, оно состоит из всех целых чисел, и чисел, представимых в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, такие числа представимы в виде периодической десятичной дроби

\mathbb{R} - множество действительных чисел, представимых в виде непериодической десятичной дроби

\mathbb{C} - множество комплексных чисел, представимых в виде $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i - мнимая единица.

В геометрии рассматриваются множества точек: например, окружность - это множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки.

"Различимые": для любых двух объектов, рассматриваемых в качестве элементов множества, должна иметься возможность решить, различны ли они или это один и тот же элемент, упоминаемый дважды. Например, если среди элементов числового множества есть "наименьшее простое четное число" и "целое число, на единицу меньше трех", очевидно, это один и тот же элемент - число 2, хотя и описанный разными способами.

"Определенные": если даны какое-то множество и некоторый объект, то можно определить, является этот объект элементом данного множества или нет. Таким образом, множество полностью определяется входящими в него элементами.

Множество считается заданным или определенным, если о каждом объекте можно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет. Таким образом, для конкретного объекта a и конкретного множества A выражения $a \in A$ и $a \notin A$ являются высказываниями, истинными или ложными.

«Число 5 принадлежит множеству корней уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ » — ложное высказывание,

«А. С. Пушкин принадлежит множеству русских поэтов» — истинное высказывание.

Один и тот же объект может быть элементом различных множеств. Например, студентка группы 287 является элементом множества особ женского пола, множества студентов ТГПУ, множества всех людей.

Множество может быть элементом другого множества. Например, множество "группы ФИЯ ТГПУ" состоит из таких элементов, как "группа 275", "группа 286" и других, которые в свою очередь являются множествами студентов.

Элементов во "множестве" не обязательно должно быть "много". Существуют множества, состоящие из одного, двух элементов, а также множество, совсем не содержащее элементов. Такое множество называется пустым множеством и обозначается \emptyset . Пустым множеством является множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$.

Если количество элементов множества выражается натуральным числом, то его называют конечным, в противном случае – бесконечным. Множество дней недели конечно, оно состоит из семи элементов, множество натуральных чисел бесконечно, так как для любого числа найдется число, большее его на единицу. Количество элементов в множестве называется мощностью множества.

Множество полностью определяется элементами, которые в него входят. Таким образом, множество можно задать путем перечисления всех его элементов. Запись $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ означает, что элементы x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат множеству A . Конечное множество, состоящее из элементов x_1, x_2, \dots, x_n , обычно обозначают так $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. При перечислении не важен порядок записи элементов в множестве. Однако удобнее перечислять элементы в каком-нибудь естественном порядке, например по алфавиту или в порядке возрастания элементов числовых множеств.

Перечислением легко задать конечное множество небольшой мощности. Например, не составит труда перечислить всех лауреатов Нобелевской премии в области литературы. Множество людей, населяющих Землю, так же конечно, но задать его перечислением элементов будет затруднительно, а множество всех треугольников на плоскости перечислением задать невозможно. Поэтому зачастую пользуются другим способом задания множества: множество можно задать при помощи характеристического свойства, то есть свойства, характерного для элементов этого множества и только для них.

Пусть $P(x)$ – некоторое предложение, выражающее свойства объекта x . Например, "число x делится на 5". Если на место x подставить любой конкретный объект соответствующей природы, мы получим истинное или ложное высказывание. Например, в приведенном выше случае $P(10)$ – истинное утверждение, а $P(7)$ – ложное.

Запись $A = \{x: P(x)\}$, где $P(x)$ обозначает характеристическое свойство, читается следующим образом « A — это множество тех x , для которых $P(x)$ является истинным». Заметим, что таким образом может быть задано как конечное, так и бесконечное множество.

Например, $A = \{x: x^2+5x+6=0\}$ — конечное множество, ведь данное квадратное уравнение имеет два корня, т. е. $A = \{-3, -2\}$. $B = \{x: x \text{ — четное}\}$ — бесконечное множество, так как четных чисел бесконечно много.

Также может быть использована следующая запись $A = \{x \in M: P(x)\}$. Здесь M — некоторое уже известное множество, из которого выбираются элементы x .

Например, $A = \{x \in \mathbb{N}: 12 \text{ делится на } x\}$ — это множество всех

натуральных делителей числа 12, то есть $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Иногда два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, например, множество $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ делится нацело на } 2 \text{ и на } 3\}$ и множество $B = \{x : x \text{ делится на } 6\}$. Ясно, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов. В этом случае говорят, что множества A и B равны.

Определение. Два множества равны в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Это обозначается так: $A=B$. В противном случае (когда в одном из множеств найдется элемент, не принадлежащий другому) пишут $A \neq B$.

Часто бывает, что все элементы множества A являются элементами другого множества B . То есть множество B содержит все элементы множества A и, может быть, какие-то еще элементы.

Определение. Говорят, что множество A является подмножеством множества B или включено в B , и пишут $A \subset B$, если всякий элемент множества A является элементом множества B , то есть $A \subset B : \forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Например, если взять какую-нибудь среднюю школу, то множество учеников десятых классов этой школы является подмножеством множества всех учеников данной школы. В свою очередь, множество учеников этой школы является подмножеством множества всех школьников города.

Пусть A - множество красных яблок, а B - множество всех яблок. Тогда $A \subset B$: ведь каждое красное яблоко является яблоком.

Множество $\{1, 2\}$ есть подмножество множества $\{1, 2, 3\}$.

Обратите внимание на разницу между отношениями принадлежности и включения, проанализировав следующие записи:

$2 \in \{2, 4, 6\}$ — число 2 является элементом множества $\{2, 4, 6\}$ (высказывание истинно),

$2 \subset \{2, 4, 6\}$ — число 2 является подмножеством множества (высказывание ложно),

$\{2\} \in \{2, 4, 6\}$ — одноэлементное множество $\{2\}$ является элементом множества $\{2, 4, 6\}$ (высказывание ложно),

$\{2\} \subset \{2, 4, 6\}$ — одноэлементное множество $\{2\}$ является подмножеством множества $\{2, 4, 6\}$ (высказывание истинно).

Понятие равенства множеств можно определить через понятие включения множеств.

Определение. Говорят, что множества A и B равны, и пишут $A=B$, если одновременно имеет место $A \subset B$ и $B \subset A$, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A . $A=B$, то есть $\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Доказательство равенства каких-либо множеств A и B состоит, таким образом, из двух частей: 1) $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$; 2) $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

Рассмотрим некоторые свойства подмножеств.

- Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.
- $\forall A : \emptyset \subset A$ и $A \subset A$.

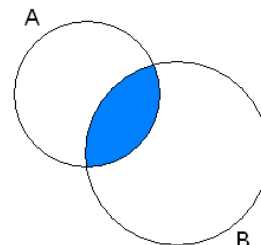
Множества \emptyset и A называют несобственными подмножествами A . Подмножества множества A , отличные от \emptyset и самого множества называются собственными. Множество всех подмножеств множества A называется степенью множества A .

Обычно в рамках одной задачи речь идет об однородных объектах, то есть всегда можно указать множество, которому принадлежат все интересующие нас объекты. Такое множество

называется универсальным и обозначается буквой U . Универсальное множество включает в себя все множества, рассматриваемые в данной задаче, в качестве подмножеств. Например множества равносторонних, равнобедренных, прямоугольных треугольников являются подмножествами множества треугольников на плоскости.

Операции над множествами

Операции над множествами проиллюстрируем графически с помощью диаграмм Венна (которые также называются кругами Эйлера). Диаграмма Венна представляет собой схематическое изображение множеств в виде множества точек на плоскости. Универсальное множество U изображается множеством точек некоторого прямоугольника, а его подмножество A — в виде круга или какой-нибудь другой простой области внутри этого прямоугольника.



Определение. Пересечением множеств A и B называется новое множество, которое обозначается $A \cap B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B , то есть $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, то $A \cap B = \{1, 3\}$.

На диаграмме Венна пересечению соответствует область, в которой расположены общие точки кругов A и B .

Множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов, так как всякий квадрат одновременно является прямоугольником и ромбом. Пересечением множества натуральных чисел, делящихся на 2, и множества натуральных чисел, делящихся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 6.

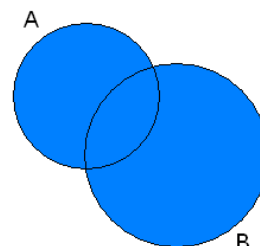
Очевидно, что

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

$$A \cap B = A \text{ тогда и только тогда, когда } A \subset B$$

Определение. Объединением множеств A и B называется новое множество, которое обозначается $A \cup B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B , то есть $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$.

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.



На диаграмме Венна это все точки плоскости, принадлежащие хотя бы одному из кругов A и B .

Пусть есть два сплава. Один сплав содержит железо, углерод, ванадий и марганец, а второй — железо, углерод, хром и никель. В каждый сплав входят по 4 химических элемента, но если мы сплавим их вместе, то в новый сплав войдут только 6 элементов: железо, углерод, ванадий, марганец, хром и никель. Дело в том, что железо и углерод были в обоих сплавах, то есть объединяемые множества имели не пустое пересечение.

Если пересечение множеств не пусто, то в их объединении повторяющиеся элементы считаются лишь по одному разу.

Очевидно, что

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$$

$$A \cup B = A \text{ тогда и только тогда, когда } B \subset A$$

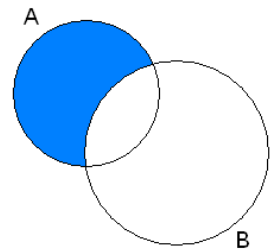
Определение. Разностью множеств A и B называется новое множество, которое обозначается $A \setminus B$ и состоит из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B , то есть $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Нужно отметить, что почти всегда $A \setminus B \neq B \setminus A$. Так для приведенного выше примера $B \setminus A = \{4\}$.

Определение. Дополнением множества A называется множество, которое обозначается \bar{A} и состоит из всех элементов универсального множества U , не принадлежащих множеству A , то есть $\bar{A} = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$.

Например, если универсальным множеством считать множество всех целых чисел \mathbb{N} , A — множеством всех четных чисел, то \bar{A} — это множество всех нечетных чисел. Если универсальным множеством считать множество всех яблок, A — множеством всех яблок сорта «антоновка», то \bar{A} — это множество всех яблок других сортов. Множество \bar{A} дополняет множество A до универсального множества U . Объединение множества с его дополнением дает универсальное множество $A \cup \bar{A} = U$. Пересечение множества с его дополнением дает пустое множество $A \cap \bar{A} = \emptyset$.



Операция разности множеств может быть выражена через операции пересечения и дополнения: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. Для того, чтобы доказать данное равенство необходимо доказать двойное включение, то есть доказать, что каждое из двух множеств, слева и справа от знака равенства, является подмножеством другого.

Действительно, если $x \in A \setminus B$, это значит, что $x \in A \wedge x \notin B$. То есть $x \in A \wedge x \in U \wedge x \notin B$. Высказывание $x \in U$ является тавтологией и не меняет истинностного значения конъюнкции. Значит $x \in A \wedge x \notin B$, то есть $x \in A \wedge x \in \bar{B}$ или по-другому $x \in A \cap \bar{B}$. Таким образом $A \setminus B \subset A \cap \bar{B}$.

Верно и обратное: $x \in A \cap \bar{B}$, то есть $x \in A \wedge x \in \bar{B}$. По определению дополнения: $x \in U \wedge x \notin B$. Таким образом, получается, что $x \in A \wedge x \in U \wedge x \notin B$. Высказывание $x \in U$ является тавтологией и не меняет истинностного значения конъюнкции. Это означает, что $x \in A \wedge x \notin B$, то есть $x \in A \setminus B$. Таким образом $A \cap \bar{B} \subset A \setminus B$.

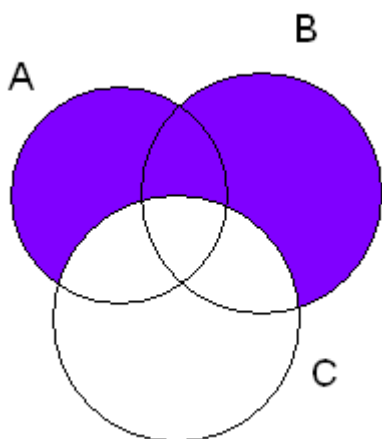
Это значит, что в любой формуле, содержащей разность множеств, можно заменить эту операцию над теми же множествами с использованием операций пересечения и дополнения.

Для всяких подмножеств A, B, C универсального множества U и пустого множества \emptyset имеют место следующие равенства:

Название	Закон для пересечения	Закон для объединения
Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Ассоциативность	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Название	Закон для пересечения	Закон для объединения
Правила де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Закон поглощения	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Множество и его дополнение	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = U$
Множество и \emptyset	$\emptyset \cap A = \emptyset$	$\emptyset \cup A = A$
Множество и U	$U \cap A = A$	$U \cup A = U$

Любое из приведенных выше равенств можно доказать, как показано в примере выше, с помощью определений операций над множествами и с использованием законов математической логики.



Одно и то же множество может быть получено с помощью различных операций над исходными множествами. Например, если A, B, C — произвольные множества, то множество, изображенное на рисунке можно записать двумя способами: так: $(A \cup B) \setminus C$ и так: $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

То есть $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Для доказательства этого факта, согласно определению равенства множеств, нужно проверить, что каждый элемент множества, стоящего слева от равенства, принадлежит множеству, стоящему справа от равенства и наоборот. То есть доказать используя определения операций над множествами два включения $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ и

$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Однако есть другой способ: применяя уже доказанные равенства из таблицы законов теории множеств методом последовательных преобразований можно привести левую часть равенства к виду, содержащемуся в правой части.

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C}$ воспользовались равенством $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
2. $(A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$ дистрибутивный закон
3. $(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ равенство $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Бинарные отношения

Рассмотрим еще одну операцию над множествами: декартово произведение множеств.

Определение. Декартовым произведением множеств A и B называется новое множество, обозначаемое $A \times B$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары (a, b) , где первый элемент пары a взят из множества A , а

второй элемент пары b из множества B , то есть $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, то декартовым произведением этих множеств будет $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4)\}$.

Заметим, что если $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$.

Очень важно также то, что $(a, b) \neq (b, a)$. Уточним, что элементы в паре упорядочены, то есть определено, какой элемент является первым, а какой — вторым.

Если $A = B$, то декартово произведение $A \times A$ называется декартовым квадратом множества A и обозначается A^2 .

Если на плоскости ввести систему координат, то каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел (x, y) , где x — абсцисса точки, а y — ее ордината. Таким образом, плоскость можно рассматривать как декартов квадрат множества действительных чисел \mathbb{R} .

Определение. Бинарным отношением ρ между множествами A и B называется любое подмножество декартова произведения множеств $A \times B$.

Исходя из определения, бинарное отношение так же, как и декартово произведение $A \times B$ есть множество пар, составленных из элементов множеств A и B . Однако бинарное отношение содержит не все возможные пары, как декартово произведение, а лишь некоторых из них. Пары, содержащиеся в бинарном отношении ρ , задают связь (или отношение) между элементами множеств A и B .

Множество, как мы уже знаем, задается либо перечислением элементов либо свойством, которому удовлетворяют все его элементы. Бинарное отношение так же может быть задано перечислением пар, входящих в бинарное отношение, или свойством пар, входящих в это бинарное отношение.

Пусть множество A — это множество всех студентов ТГПУ, а множество B — множество всех преподавателей ТГПУ. Тогда декартовым произведением $A \times B$ будет множество всевозможных пар, где первым элементом является студент, а вторым преподаватель. Зададим бинарное отношение ρ следующим образом: студент a имеет в зачетной книжке автограф преподавателя b , то есть бинарному отношению ρ принадлежат лишь те пары (студент, преподаватель) из декартова произведения, в которых студент a сдал преподавателю b зачет или экзамен на положительную оценку.

Отношения равенства и неравенства чисел так же являются бинарными отношениями. Бинарное отношение $2x + 3y \geq 5$ содержит такие пары элементов (x, y) из декартова произведения \mathbb{R}^2 , подставив которые в выражение, получим верное неравенство. Такими будут, например, пары $(1, 1), (2, 1), (20, 1)$, и не будут пары $(-2, 2), (0, 0)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи бинарных отношений.

Если бинарное отношение задано на декартовом квадрате некоторого множества A , то такое бинарное отношение задает связь между элементами внутри этого множества. Такие бинарные отношения могут обладать следующими свойствами.

Определение. Говорят, что бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , рефлексивно, если для любого элемента a из множества A пара (a, a) принадлежит ρ , то есть $\forall a \in A (a, a) \in \rho$.

Примером рефлексивного бинарного отношения может служить отношение $a \leq b$, заданное на любом числовом множестве, так как любое число не больше самого себя.

Определение. Говорят, что бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , симметрично, если для любой пары элементов a, b из множества A , таких что $(a, b) \in \rho$ из того, что пара (a, b) принадлежит ρ , следует, что и пара (b, a) принадлежит ρ , то есть $\forall a, b \in A: (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$.

Например, отношение "быть перпендикулярными", заданное на множестве всех прямых плоскости, является симметричным: если прямая a перпендикулярна прямой b , то прямая b перпендикулярна прямой a .

Определение. Говорят, что бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , антисимметрично, если для любой пары элементов a, b из множества A , таких что $(a, b) \in \rho$, из того, что пара (a, b) принадлежит ρ и $a \neq b$, следует, что пара (b, a) не принадлежит ρ , то есть $\forall a, b \in A: ((a, b) \in \rho \wedge a \neq b) \Rightarrow (b, a) \notin \rho$.

Антисимметричным является бинарное отношение "не выше", заданное на множестве учеников 3Б класса: если Петя не выше Васи (пара (Петя, Вася) принадлежит бинарному отношению) и при этом они не одинакового роста (то есть имеет место строгое неравенство), то тогда нельзя сказать, что Вася не выше Пети (то есть пара (Вася, Петя) не принадлежит бинарному отношению). Определение антисимметричности бинарного отношения можно переформулировать следующим образом: говорят, что бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , антисимметрично, если для любых двух элементов a, b принадлежащих множеству A , из того, что пара (a, b) принадлежит ρ и пара (b, a) принадлежит ρ , следует, что $a = b$, то есть $\forall a, b \in A: ((a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho) \Rightarrow a = b$.

Определение. Говорят, что бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , транзитивно, если для любых трех элементов a, b и c принадлежащих множеству A , из того, что пара (a, b) принадлежит ρ и пара (b, c) принадлежит ρ , следует, что и пара (a, c) принадлежит ρ , то есть $\forall a, b, c \in A: (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.

Транзитивным является отношение параллельности прямых на плоскости: если прямая a параллельна прямой b , а прямая b в свою очередь параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .

В зависимости от того, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное на декартовом квадрате, оно может быть отношением эквивалентности или отношением частичного порядка.

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , называется отношением эквивалентности, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Определение. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , называется отношением частичного порядка (отношением упорядоченности), если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Отношением эквивалентности является например отношение параллельности прямых на плоскости: каждая прямая параллельна самой себе (отношение рефлексивно), если прямая a параллельна прямой b , то прямая b параллельна прямой a (отношение симметрично), если прямая a параллельна прямой b , а прямая b в свою очередь параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c (отношение транзитивно).

Другим частным случаем бинарных отношений являются отображения.

Определение. Отображением (или функцией) f из множества X в множество Y является такое бинарное отношение между множествами X и Y , что для всякого элемента x из X существует единственный y из Y , такой, что $(x, y) \in f$, то есть $\forall x \in X \exists! y \in Y (x, y) \in f$.

Тот факт, что бинарное отношение f между множествами X и Y является отображением изображают так: $f: X \rightarrow Y$. Множество X называют областью определения функции f и обозначают D_f . Множеством значений функции называют подмножество множества Y , обозначаемое E_f , состоящее из таких элементов, что для любого из этих элементов $y \in Y$ найдется такой элемент $x \in X$, что пара (x, y) принадлежит бинарному отношению f , то есть $f(X) = \{y \in Y: \forall y \in Y \exists x \in X (x, y) \in f\}$. Заметим, что $D_f = X$, $E_f \subset Y$.

Элемент x пары (x, y) называется образом элемента y , элемент y называется прообразом элемента x . Тот факт, что пара (x, y) принадлежит отображению обозначается $(x, y) \in f$ или так $f(x) = y$.

Из определения следует, что бинарное отношение φ не является отображением если найдется хотя бы один $x \in X$ такой, что ни для какого y не имеет место $(x, y) \in \varphi$, или найдется такой $x \in X$, что для двух различных элементов y_1 и y_2 из множества Y , таких что $(x, y_1) \in \varphi$ и $(x, y_2) \in \varphi$.

Пусть множество X - это множество студентов, присутствующих на лабораторном занятии по информатике, множество Y - множество компьютеров в этой аудитории, ψ - такое бинарное отношение, что пара $(x, y) \in \psi$ если студент x работает за компьютером y . Тогда, согласно определению, бинарное отношение ψ будет являться отображением, если все студенты в аудитории обеспечены компьютерами (нет ни одного студента без компьютера) и нет такого студента, который бы одновременно занимал два компьютера, при этом в аудитории могут быть не занятые компьютеры и могут быть студенты, которые работают по несколько человек за одним компьютером.

Рассмотрим следующие бинарные отношения из $X = \{1, 2, 3\}$ в $Y = \{3, 4, 5, 6\}$:

1. $\rho_1 = \{(1, 4), (2, 6), (3, 5)\}$
2. $\rho_2 = \{(2, 3), (3, 5)\}$
3. $\rho_3 = \{(1, 4), (1, 6), (2, 6), (3, 5)\}$
4. $\rho_4 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

Отношения ρ_1 и ρ_4 являются отображениями, а отношения ρ_2 и ρ_3 - не являются.

В школьном курсе математики рассматриваются некоторые числовые отображения (функции):

f_1	$R \rightarrow R$	$f_1(x) = ax + b$	линейная функция
f_2	$R \rightarrow R$	$f_2(x) = ax^2 + bx + c$	квадратичная функция
f_3	$R \rightarrow R$	$f_3(x) = x^n, n \in N$	степенная функция
f_4	$R_{+} \rightarrow R$	$f_4(x) = \log_a(x), a \neq 1, a > 0$	логарифмическая функция
f_5	$R \rightarrow R$	$f_5(x) = \sin(x)$	тригонометрические функции
f_6	$R \rightarrow R$	$f_6(x) = \cos(x)$	

f_7	$R \rightarrow R$	$f_6(x) = a^x, a \neq 1, a > 0$	показательная функция
f_8	$R \rightarrow R$	$f_8(x) = x $	функция модуля числа

Определение. Функция $f: X \rightarrow Y$ называется инъективной, если для всяких элементов $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из того, что $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

В приведенных выше примерах инъективными будут функции ρ_1 и f_1, f_3 для нечетных показателей, f_4, f_7 .

Определение. Функция $f: X \rightarrow Y$ называется сюръективной, если для всякого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$. То есть функция f сюръективна, если $E_f = Y$.

В приведенных выше примерах отображения ρ_1 и ρ_4 не являются сюръективными. Сюръективными будут являться функции f_1, f_3 для нечетных показателей, f_4 .

Определение. Функция $f: X \rightarrow Y$ называется биективной, если она инъективна и сюръективна одновременно. Такая функция называется также взаимно-однозначным соответствием, в том смысле, что для всякого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$ такой, что $f(x) = y$ и для всякого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$, такой, что $f(x) = y$.

В приведенных выше примерах биективными будут являться функции f_1, f_3 для нечетных показателей, f_4 .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ функция, множества X и Y конечны, причем множество X состоит из n элементов, а множество Y из m элементов, тогда:

- если f инъективная, то $n \leq m$
- если f сюръективная, то $n \geq m$
- если f биективная, то $n = m$

То есть для конечных множеств наличие между элементами этих множеств взаимно-однозначного соответствия говорит о том, что они имеют одинаковое число элементов. Как узнать, что количество гостей равно количеству вилок на столе? Достаточно, чтобы каждый гость взял в руки вилку: таким образом мы установим соответствие между множеством гостей и множеством вилок. Если не найдется гостя без вилки, и если ни одна вилка не останется после этого на столе, то соответствие является взаимно-однозначным, и количество гостей совпадает с количеством вилок. Этот же способ сравнения может быть применен и к бесконечным множествам.

Определение. Множества X и Y называют равномошными (говорят, что множества X и Y имеют одинаковую мощность), если существует биективное отображение множества X на множество Y .

Определение. Множество, равномошное множеству натуральных чисел, называется счетным. К счетным множествам относится само множество \mathbb{N} , а так же множества \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .

Определение. Множество, равномошное множеству действительных чисел, называется множеством мощности континуума. К таким множествам относится само множество \mathbb{R} и \mathbb{C} .

6. Комбинаторика

Общие правила комбинаторики

Правило суммы Если объект A можно выбрать n различными способами, а объект B - k различными способами, то объект A или B можно выбрать $n+k$ различными способами.

Правило произведения Если объект A можно выбрать n различными способами, а объект B - k различными способами, то объект A и B можно выбрать $n*k$ различными способами.

Например, если в магазине имеется три разных коробки шоколадных конфет и четыре вида плюшевых медведей, то подарить девушке что-нибудь одно (конфеты или медведя) можно семью различными способами, а составить подарок из плюшевого медведя и коробки конфет можно двенадцатью различными способами.

Схема выбора, приводящая к размещениям (без повторений)

Пусть множество $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ состоит из n различных элементов. Из этого множества будем выбирать m элементов без повторения, при этом порядок выбора элементов важен. Результатом будет m -элементные подмножества множества E , отличающиеся набором элементов или (при совпадении набора элементов) их порядком. Такие упорядоченные подмножества называются размещениями из n элементов по m элементов. Общее количество таких подмножеств обозначается A_n^m и вычисляется по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$. Для сокращения записи воспользуемся понятием факториала. n -факториал - это произведение всех натуральных чисел от единицы до n : $n! = 1*2*3*\dots*(n-1)*n$. (Заметим, что $0! = 1$) Тогда формула числа размещений из n элементов по m примет вид $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Схема выбора, приводящая к перестановкам (без повторений)

В случае если $n=m$ подмножества не будут отличаться набором элементов (все элементы исходного множества войдут в искомое подмножество), а только порядком элементов. Для нахождения количества таких подмножеств применим формулу:

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$. Такие подмножества исходного множества называются перестановками из n элементов и общее число перестановок обозначается P_n . Общее количество перестановок из n элементов равно $P_n = n!$.

Схема выбора приводящая к сочетаниям (без повторений)

Пусть множество $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ состоит из n различных элементов. Из этого множества будем выбирать m элементов без повторения и без учета порядка. Результатом будет m -элементные подмножества множества E , отличающиеся только набором элементов. Такие подмножества называются сочетаниями из n элементов по m элементов. Общее количество таких подмножеств обозначается C_n^m и вычисляется по

формуле
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Заметим, что все эти формулы действуют только в том случае, если множество $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ не содержит повторяющихся элементов.

7. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Случайные события и операции над ними

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений.

Опытom называется воспроизводимый комплекс условий, при которых наблюдается изучаемое случайное явление. Опытom, например, является подбрасывание игральной кости или монеты.

Событие — это любая качественная или количественная характеристика изучаемого случайного явления. Событие называется достоверным, если оно всегда наступает в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно не может наступить в результате опыта. В случае с подбрасыванием монеты случайными событиями будут являться «орел» или «решка». В случае игральной кости случайные события могут быть более разнообразными, например:

появление на верхней грани игральной кости единицы;
..... числа, большего трех;
..... простого числа и т. д.

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A , B и т.д. Невозможное событие будем обозначать буквой V , а достоверное буквой U .

Множество элементарных событий опыта — множество всех возможных взаимоисключающих исходов опыта.

Множество элементарных событий опыта обычно обозначают греческой буквой Ω или латинской буквой E . Для опыта с бросанием монеты множество элементарных исходов опыта состоит из двух событий: «орел» и «решка». Обозначим событие «орел» как ω_1 , «решка» как ω_2 , множество элементарных исходов таким образом состоит из двух событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Множество элементарных событий опыта с бросанием игральной кости состоит из шести элементарных событий, по числу граней кубика: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Любое случайное событие, наступающее в эксперименте, может быть представлено как

подмножество множества элементарных событий. Рассмотрим случайное событие A - «на игральной кости выпало четное число». Это событие произойдет, если на кости выпадут числа 2, 4 и 6, то есть если произойдут события e_2, e_4, e_6 . Наступление одного из элементарных событий e_2, e_4, e_6 приводит к наступлению события A , говорят, что события e_2, e_4, e_6 *благоприятны* для A . Множество элементарных событий, благоприятных событию A , является подмножеством множества E . Заметим, что невозможное событие (например появление десяти очков после одного бросания игральной кости) представляется пустым множеством, которое также является подмножеством множества E .

Определение. Суммой событий A и B называется событие C , заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из двух событий A или B . Тот факт, что событие C является суммой событий A и B записывают так: $C = A + B$.

Определение. Произведением событий A и B называется событие C , заключающееся в том, что произошли оба события A и B . Тот факт, что событие C является произведением событий A и B записывают так: $C = A * B$.

Определение. Разностью событий A и B называется событие C , заключающееся в том, что произошло событие A и при этом не произошло событие B . Тот факт, что событие C является разностью событий A и B записывают так: $C = A - B$.

Определение. Событием, противоположным событию A , называется событие \bar{A} , заключающееся в том, что событие A не произошло.

Если опыт заключается в однократном бросании игральной кости, то множество элементарных исходов такого опыта состоит из элементов $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, событие A - на игральном кубике выпало четное число (множество благоприятных этому событию элементарных исходов состоит из следующих элементов: $E_A = \{e_2, e_4, e_6\}$), а B - на игральном кубике выпало число больше трех (ему благоприятны элементарные исходы $E_B = \{e_4, e_5, e_6\}$), то

событие $C = A + B$ состоит в том, что выпавшее на верхней грани кубика число либо четное, либо больше трех либо удовлетворяет обоим этим условиям; множество благоприятных ему элементарных исходов $\{e_2, e_4, e_5, e_6\} = E_A \cup E_B$;

событие $C = A * B$ состоит в том, что выпавшее на верхней грани кубика число четное и больше трех, то есть удовлетворяет обоим этим условиям; множество благоприятных исходов $\{e_4, e_6\} = E_A \cap E_B$;

событие $C = A - B$ состоит в том, что выпавшее на верхней грани кубика число четное, но оно не больше трех (меньше либо равно трем); такому событию благоприятен единственный элементарный исход $\{e_2\} = E_A \setminus E_B$;

событие \bar{A} состоит в том, что выпавшее на верхней грани кубика число не является четным; такому событию благоприятны элементарные исходы $\{e_1, e_3, e_5\} = E \setminus E_A$.

Определение. Если сумма событий A_1, A_2, \dots, A_n - достоверное событие, то есть $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$, то говорят, что события A_1, A_2, \dots, A_n составляют полную группу событий.

Определение. Если два события A и B не могут произойти одновременно, то есть произведение этих событий есть невозможное событие $A * B = V$ то такие события называются несовместными.

Определение. Если любые два различных события из событий A_1, A_2, \dots, A_n являются

несовместными ($\forall i \neq j \ A_i * A_j = V$), то говорят, что события A_1, A_2, \dots, A_n составляют группу попарно несовместных событий.

Определение. Если сумма событий A_1, A_2, \dots, A_n - достоверное событие, то есть $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$, и любые два различных события из событий A_1, A_2, \dots, A_n являются несовместными ($\forall i \neq j \ A_i * A_j = V$), то говорят, что события A_1, A_2, \dots, A_n составляют полную группу попарно несовместных событий.

Вероятность случайных событий

Определение. (классическое определение вероятности) Вероятностью события A называется число $P(A) = \frac{m}{n}$, где n - число всевозможных, взаимоисключающих и равновозможных исходов рассматриваемого опыта, m - число тех из них, которые благоприятны событию A .

В рассматриваемом определении число n - это количество элементов в множестве элементарных событий рассматриваемого опыта. Однако, множество элементарных событий должно быть выбрано таким образом, чтобы элементарные исходы в нем составляли *полную группу попарно несовместных событий* и были *равновозможны*, то есть ни один из исходов не является объективно более вероятным чем другие. Например, интуитивно понятно, что при бросании игрального кубика появление четного числа более вероятно, чем появление числа один, а появление единицы и шестерки являются равновозможными.

Вероятность появления на верхней грани игральной кости определенного числа очков, например 3, равно $P(e_3) = \frac{1}{6}$. Количество всевозможных, взаимоисключающих и равновозможных исходов рассматриваемого опыта $n=6$ ($E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$), при этом только один из них (e_3) является благоприятным. Вычислим теперь вероятность события A - на игральном кубике выпало четное число очков. Знаменатель по-прежнему равен 6, числитель же равен 3, так как множество благоприятных этому событию элементарных исходов состоит из трех элементов: $E_A = \{e_2, e_4, e_6\}$. Таким образом $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Из определения вероятностей следует, что вероятность любого события не меньше нуля и не больше единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$, кроме того $P(V) = 0$, а $P(U) = 1$.

Определение (статистическое определение вероятности) Пусть проводится опыт, в котором может наступить событие A . Предположим, что опыт был проведен N раз, из них в M случаях наступило событие A . Тогда число $\mu(A) = \frac{M}{N}$ называется статистической вероятностью или относительной частотой события A в рассмотренной серии опытов.

Например, опыт заключается в бросании мяча в баскетбольное кольцо. В результате проведения опыта возможно два исхода: «мяч в кольцо» или «промах». Студент Петров 10 раз бросал мяч в кольцо, из них промахов было семь, а попаданий - три. Таким образом в данной серии бросков вероятность события "мяч в кольцо" равна 0,3, а вероятность "промаха" - 0,7.

Операции над вероятностями

Здесь приведем некоторые утверждения без доказательств об операциях над вероятностями.

Утверждение. (о вероятности суммы попарно несовместных событий) Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B)=P(A)+P(B)$ если $A*B=V$

Пусть событие A заключается в том, что на верхней грани игральной кости выпало четное число очков, а событие B в том, что выпала единица. Эти события несовместны: появление события A исключает появление в том же испытании события B и наоборот.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{1}{6}, \quad P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Утверждение. (о вероятности суммы двух событий) Вероятность суммы любых двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного осуществления. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B)$

Пусть событие A заключается в том, что на верхней грани игральной кости выпало четное число очков, а событие B в том, что выпавшее число больше трех. Вероятность события A равна $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, вероятность события B также $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Событию A благоприятны исходы $E_A=\{e_2, e_4, e_6\}$, а событию B - $E_B=\{e_4, e_5, e_6\}$. Эти события не являются несовместными: при наступлении исходов e_4 и e_6 наступают оба события. Таким образом вероятность совместного наступления событий A и B

равна $P(A*B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Таким образом, используя формулу, получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Иногда вероятность некоторого события A зависит от того, наступило или нет событие B . Например, опыт заключается в том, что из колоды наугад вынимают одну за другой две карты. Событие A - первая вынутая карта дама, событие B - вторая вынутая

карта дама. Вероятность события A равна $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Вероятность события B зависит от того, произошло или не событие A . Если событие A произошло, то в колоде осталось 35 карт из которых 3 дамы, и тогда вероятность события B равна

$P(B/A)=\frac{3}{35}$. Если же событие A не произошло, то есть произошло противоположное событие \bar{A} , то в колоде осталось 35 карт, но по-прежнему 4 дамы, и тогда вероятность события B равна $P(B/\bar{A})=\frac{4}{35}$. В таких случаях говорят, что событие B зависит от события A .

Утверждение. (о произведении двух событий) Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло. $P(A*B)=P(B)*P(A/B)$ или, что то же самое, $P(A*B)=P(A)*P(B/A)$.

Из утверждения следует, что вероятность события $A*B$, состоящего в том, что из колоды вынуты две дамы подряд равна $P(A*B)=P(A)*P(B/A)=\frac{4}{36}*\frac{3}{35}=\frac{1}{105}$.

Если события A и B независимы, то условная вероятность события A при условии события B равна безусловной вероятности события A : $P(A/B)=P(A)$.

Утверждение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A*B)=P(A)*P(B)$.

Например, игральную кость бросают дважды, какова вероятность, что на верхней грани оба раза выпадет шестерка. Событие A - в первом бросании выпала шестерка, событие B - во втором бросании выпала шестерка; событие, вероятность которого необходимо найти, есть произведение событий $A*B$. Очевидно, что события A и B независимы, вероятность каждого из них $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$, значит вероятность их произведения равна $P(A*B)=P(A)*P(B)=\frac{1}{6}*\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

8. Элементы математической статистики

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде. Это первая задача. Вторая задача, оценить, хотя бы приблизительно, интересующие нас характеристики наблюдаемой случайной величины. Следующей задачей, является проверка статистических гипотез, т.е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными.

Предметом исследования в математической статистике является совокупность объектов, однородных относительно некоторых признаков.

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом, называется *генеральной совокупностью*.

Для решения задач исследования проводится эксперимент (измерение, тестирование, анкетирование), в результате которого получают значение некоторой случайной величины (результаты тестирования, количество баллов). Если в эксперименте участвуют все объекты генеральной совокупности, то такое обследование называют *сплошным*.

Часто проводить сплошное обследование, когда изучаются все объекты (например — перепись населения), трудно или дорого, а иногда невозможно. Поэтому обычно применяют выборочный метод, который заключается в том, что из генеральной совокупности случайным образом извлекают n элементов. Эти элементы называются *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Количество элементов в выборке называется ее *объемом*. Исследователь изучает и анализирует выборочную совокупность и на основании полученных показателей делает вывод о параметрах генеральной совокупности.

Допустим, из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n , измерена некоторая величина X , в результате чего получен ряд значений x_1, x_2, \dots, x_n . Этот ряд называется *простым статистическим рядом*.

Пример

Измерена масса тела 10 девочек 6 лет. Полученные данные образуют простой статистический ряд:

24 22 23 28 24 23 25 27 25 25

Отдельные значения статистического ряда называются *вариантами*. Если варианта x_i появилась m раз, то число m называют *частотой*, а ее отношение к объему выборки $p = m/n$ – *относительной частотой*.

Последовательность варианта, записанная в возрастающем (убывающем) порядке, называется *ранжированным рядом*.

Пример

Ранжированный ряд:

22 23 23 24 24 25 25 25 27 28

Полученная таким образом последовательность $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ значений случайной величины X называется *вариационным рядом*.

Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.

Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на некоторую конечную величину. В дискретных вариационных рядах задаются точечные значения признака. Общий вид дискретного ряда показан в таблице.

Значение признака (x_i)	x_1	x_2	...	x_k
Частоты (m_i)	m_1	m_2	...	m_k

Если выборка представлена большим количеством различных значений непрерывной случайной величины, то группировку данных проводят в виде интервального вариационного ряда. Для этого диапазон варьирования признака разбивают на несколько (5-10) равных интервалов и указывают количество вариантов, попавших в каждый интервал.

Алгоритм построения интервального вариационного ряда

1. Исходя из объема выборки n , определить количество интервалов k .

n	25-40	40-60	60-100	100-200	>200
k	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

2. Вычислить размах ряда: $R = X_{\max} - X_{\min}$
3. Определить ширину интервала: $h = R/(k-1)$
4. Найти начало первого интервала $X_0 = X_{\min} - h/2$
5. Составить интервальный вариационный ряд.

Пример

Измерена масса тела 100 женщин 30 лет, получены значения от 60 до 90 кг.

интервалы	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90
-----------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

количество	14	34	29	15	6	2
------------	----	----	----	----	---	---

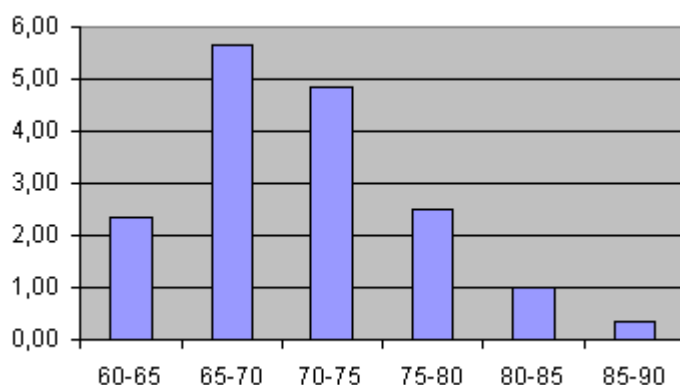
Размах ряда: $R = X_{\max} - X_{\min} = 90 - 60 = 30$

Ширина интервала: $h = R / (k - 1) = 30 / 5 = 6$

Интервальный вариационный ряд:

интервал	Середина интервала	m	m/h
60-65	62,5	14	2,33
65-70	67,5	34	5,67
70-75	72,5	29	4,83
75-80	77,5	15	2,50
80-85	82,5	6	1,00
85-90	87,5	2	0,33

Графическим изображением интервального вариационного ряда является *гистограмма*. Для ее построения на оси ОХ откладывают интервалы шириной h , на каждом интервале строят прямоугольник высотой m/h . Величина m/h называется плотностью частоты. Гистограмма является эмпирическим аналогом графика дифференциальной функции распределения.



Основные характеристики вариационного ряда

Построение вариационного ряда является только первым шагом в изучении статистических данных. Для более глубокого исследования материала необходимы обобщающие количественные показатели, вскрывающие общие свойства статистической совокупности. Эти показатели, во-первых, дают общую картину, показывают тенденцию развития процесса или явления, нивелируя случайные индивидуальные отклонения, во-вторых, позволяют сравнивать вариационные ряды и, наконец, используются во всех разделах математической статистики при более полном и сложном математическом анализе статистической совокупности.

Существуют характеристики вариационного ряда: меры уровня, или средние.

Меры уровня, или средние. Наиболее употребительными в статистических исследованиях являются три вида средних: средняя арифметическая, мода и медиана.

Выбор типа средней для характеристики вариационного ряда зависит от цели, для которой исчисляется средняя, от особенностей исходного материала и от возможностей той или иной средней.

Прежде чем перейти к характеристике отдельных видов средних, сформулируем некоторые, самые общие требования к средней.

Средняя, представляет собой количественную характеристику качественно однородной совокупности. Нарушение этого требования приводит к неверным выводам, искажает суть явления.

Кроме того, необходимо, чтобы *средняя не была слишком абстрактной, а имела ясный смысл в решении задачи.* Желательно, чтобы процедура вычисления средней была проста. При прочих равных условиях предпочтение отдается той средней, которая проще вычисляется. При выборе средней желательно *свести к минимуму влияние случайных колебаний выборки.* Так, если одной и той же совокупности взять несколько групп элементов, то средние, им соответствующие, будут, как правило, различаться по величине. Рекомендуется использовать вид средней, у которой эти различия минимальны.

Наиболее распространённой мерой уровня - является *средняя арифметическая*:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

где $\sum_{i=1}^k$ - знак суммирования от 1 до k; x_i -варианты с порядковым номером i;

$\sum_{i=1}^k n_i = n$ - объем совокупности (число элементов совокупности); n_i - частота варианта x_i , k - число варианта. Если вместо частот заданы частоты q_i , то формула имеет вид

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i q_i}{\sum_{i=1}^k q_i} \quad \text{где } \sum_{i=1}^k q_i = 1 \text{ или } 100\%$$

Пример: вычислим среднее арифметическое массы тела девочек 6 лет (ранжированный ряд 22 23 23 24 24 25 25 25 26 27).

$$\bar{x} = \frac{22 + 23 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 26 + 27}{10} = 24,6$$

В том случае, когда статистические данные представлены в виде интервального вариационного ряда, при вычислении выборочного среднего значениями вариант считают середины интервалов.

Пример: вычислить среднее значение массы тела женщин 30 лет.

$$\bar{x} = \frac{62,5 \cdot 14 + 67,5 \cdot 34 + 72,5 \cdot 29 + 77,5 \cdot 15 + 82,5 \cdot 6 + 87,5 \cdot 2}{100} = 71,05$$

Выборочное среднее является основной характеристикой положения, показывает центр распределения совокупности, позволяет охарактеризовать исследуемую совокупность одним

числом, проследить тенденцию развития, сравнить различные совокупности.

Непараметрическими характеристиками положения являются *мода и медиана*. *Модой* называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианой называется варианта, расположенная в центре ранжированного ряда. Если ряд состоит из четного числа вариантов, то медианой считают среднее арифметическое двух вариантов, расположенных в центре ранжированного ряда.

Пример: найти моду и медиану выборочной совокупности по массе тела девочек 6 лет

$$M_0 = 25; M_e = 24,5$$

Более ценными для характеристики рассеяния признака являются показатели, при расчете которых используются отклонения всех вариантов от некоторой средней (например, средней арифметической, медианы). К таким мерам рассеяния, в частности, относятся дисперсия и среднее квадратичное отклонение. Последние меры рассеяния меньше любой другой меры подвержены случайным колебаниям выборки. Среднее квадратичное отклонение и дисперсия нашли широкое применение почти во всех разделах математической статистики.

Дисперсия, или *средний квадрат отклонения* (обозначим σ^2) есть средняя арифметическая из квадратов отклонений вариантов от их средней арифметической, т. е. в математической записи

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 q_i}{\sum_{i=1}^k q_i}$$

где x_i -варианта с порядковым номером i ; \bar{x} - средняя арифметическая; k - число вариантов; q_i - частота или частость с порядковым номером i .

Часто для исследования удобно представлять меру рассеяния в тех же единицах измерения, что и варианты. Тогда вместо дисперсии используют среднее квадратичное отклонение, которое является квадратным корнем из дисперсии, т. е. среднее квадратичное отклонение вычисляется по формуле

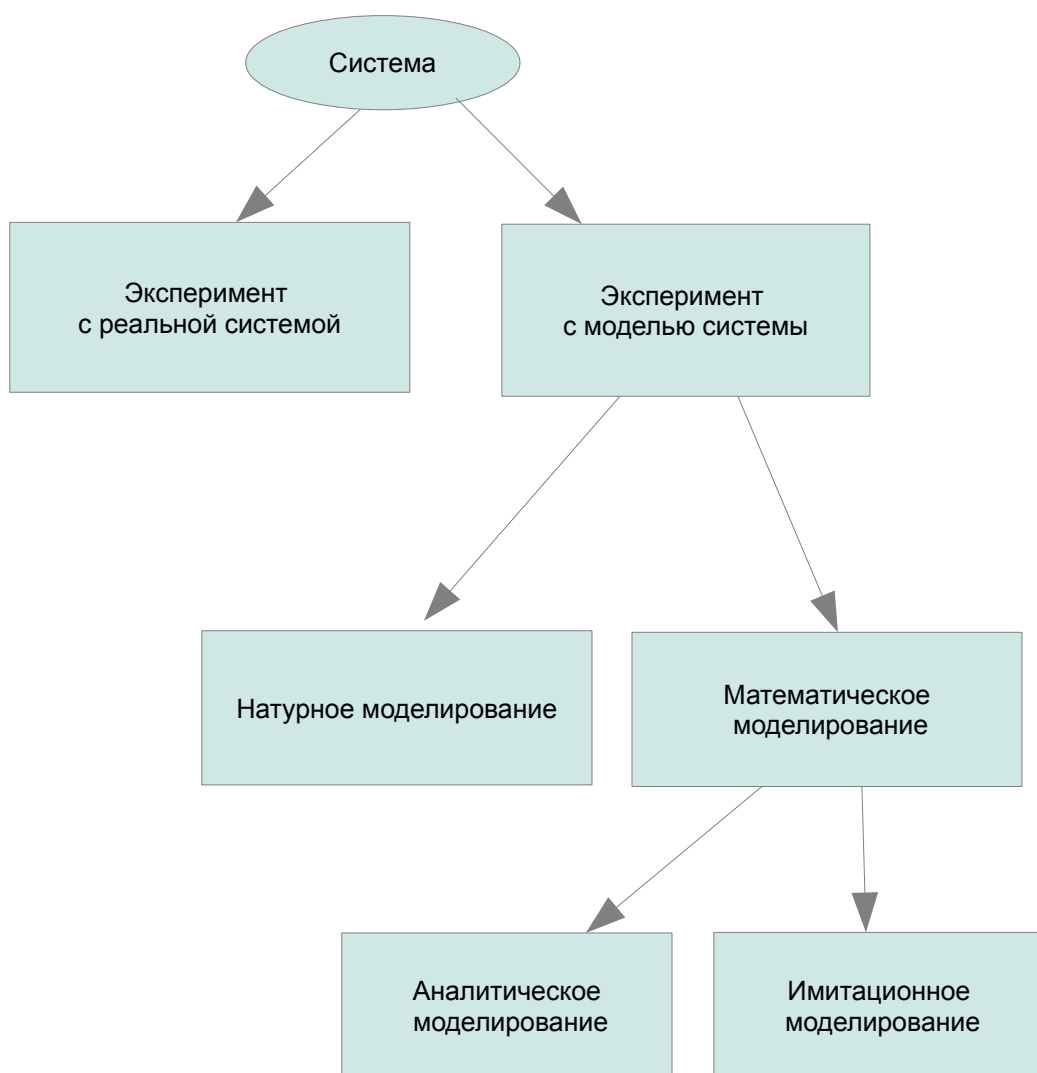
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 q_i}{\sum_{i=1}^k q_i}}$$

9. Математические модели

Модель (*modèle* (фр.), от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») — это упрощенное представление реального устройства и/или протекающих в нем процессов, явлений.

Построение и исследование моделей, то есть моделирование, облегчает изучение имеющихся в реальном устройстве (процессе, ...) свойств и закономерностей. Моделирование является обязательной частью исследований и разработок, неотъемлемой частью нашей жизни, поскольку сложность любого материального объекта и окружающего его мира бесконечна вследствие неисчерпаемости материи и форм её взаимодействия внутри себя и с внешней средой.

Одни и те же устройства, процессы, явления и т. д. (далее - «системы») могут иметь много разных видов моделей. Как следствие, существует много названий моделей, большинство из которых отражает решение некоторой конкретной задачи. Ниже приведена классификация и дана характеристика наиболее общих видов моделей.



Иерархия моделирования системы [11]

Моделирование всегда предполагает принятие допущений той или иной степени важности.

При этом должны удовлетворяться следующие требования к моделям:

- *адекватность*, то есть соответствие модели исходной реальной системе и учет, прежде всего, наиболее важных качеств, связей и характеристик. Оценить адекватность выбранной модели, особенно, например, на начальной стадии проектирования, когда вид создаваемой системы ещё неизвестен, очень сложно. В такой ситуации часто полагаются на опыт предшествующих разработок или применяют определенные методы;
- *точность*, то есть степень совпадения полученных в процессе моделирования результатов с заранее установленными, желаемыми. Здесь важной задачей является оценка потребной точности результатов и имеющейся точности исходных данных, согласование их как между собой, так и с точностью используемой модели;
- *универсальность*, то есть применимость модели к анализу ряда однотипных систем в одном или нескольких режимах функционирования. Это позволяет расширить область применимости модели для решения большего круга задач;
- *целесообразная экономичность*, то есть точность получаемых результатов и общность решения задачи должны увязываться с затратами на моделирование. И удачный выбор модели, как показывает практика, — результат компромисса между отпущенными ресурсами и особенностями используемой модели;
- и др.

Эвристические модели

Эвристические модели, как правило, представляют собой образы, рисуемые в воображении человека. Их описание ведется словами естественного языка (например, вербальная информационная модель) и, обычно, неоднозначно и субъективно. Эти модели неформализуемы, то есть не описываются формально-логическими и математическими выражениями, хотя и рождаются на основе представления реальных процессов и явлений.

Эвристическое моделирование — основное средство вырваться за рамки обыденного и устоявшегося. Но способность к такому моделированию зависит, прежде всего, от богатства фантазии человека, его опыта и эрудиции. Эвристические модели используют на начальных этапах проектирования или других видов деятельности, когда сведения о разрабатываемой системе ещё скудны. На последующих этапах проектирования эти модели заменяют на более конкретные и точные.

Натурные модели

Отличительной чертой этих моделей является их подобие реальным системам (они материальны), а отличие состоит в размерах, числе и материале элементов и т. п. По принадлежности к предметной области модели подразделяют на следующие:

- *Физические модели*. Это — реальные изделия, образцы, экспериментальные и натурные модели, когда между параметрами системы и модели одинаковой физической природы существует однозначное соответствие. Выбор размеров таких моделей ведется с соблюдением *теории подобия*.

Физическое моделирование — основа наших знаний и средство проверки наших гипотез и результатов расчетов. Физическая модель позволяет охватить явление или процесс во всём их многообразии, наиболее адекватна и точна, но достаточно дорога, трудоемка и менее универсальна. В том или ином виде с физическими моделями работают на всех этапах проектирования.

- *Технические модели*;

- *Социальные модели;*
- *Экономические модели и т.д.*

Математические модели

Математические модели — формализуемые, то есть представляют собой совокупность взаимосвязанных математических и формально-логических выражений, как правило, отображающих реальные процессы и явления (физические, психические, социальные и т. д.). По форме представления бывают:

- *аналитические модели.* Их решения ищутся в замкнутом виде, в виде функциональных зависимостей. Удобны при анализе сущности описываемого явления или процесса и использовании в других математических моделях, но отыскание их решений бывает весьма затруднено;
- *численные модели.* Их решения — дискретный ряд чисел (таблицы). Модели универсальны, удобны для решения сложных задач, но не наглядны и трудоемки при анализе и установлении взаимосвязей между параметрами. В настоящее время такие модели реализуют в виде программных комплексов — пакетов программ для расчета на компьютере. Программы и комплексы бывают прикладные, привязанные к предметной области и конкретному объекту, явлению, процессу, и общие, реализующие универсальные математические соотношения (например, расчет системы алгебраических уравнений);
- *формально-логические информационные модели* — это модели, созданные на формальном языке.

Построение математических моделей возможно следующими способами

- аналитическим путем, то есть выводом из физических законов, математических аксиом или теорем;
- экспериментальным путем, то есть посредством обработки результатов эксперимента и подбора приближенно совпадающих (аппроксимирующих) зависимостей.

Математические модели более универсальны и дешевы, позволяют поставить «чистый» эксперимент, прогнозировать развитие явления или процесса, отыскать способы управления ими. Математические модели — основа построения компьютерных моделей и применения вычислительной техники.

Разновидности моделирования

С понятием «модель» мы сталкиваемся с детства. Игрушечный автомобиль, самолет или корабль для многих были любимыми игрушками, равно как и плюшевый медвежонок или кукла. В развитии ребенка, в процессе познания им окружающего мира, такие игрушки, являющиеся, по существу, моделями реальных объектов, играют важную роль. В подростковом возрасте для многих увлечение авиамоделированием, судомоделированием, собственноручным созданием игрушек, похожих на реальные объекты, оказало влияние на выбор жизненного пути.

Что же такое модель? Что общего между игрушечным кораблем и рисунком на экране компьютера, изображающим сложную математическую абстракцию? И все же общее есть: и в том, и в другом случае мы имеем образ реального объекта или явления, «заместителя» некоторого «оригинала», воспроизводящего его с той или иной

достоверностью и подробностью. Или то же самое другими словами: модель является представлением объекта в некоторой форме, отличной от формы его реального существования.

Практически во всех науках о природе, живой и неживой, об обществе, построение и использование моделей является мощным орудием познания. Реальные объекты и процессы бывают столь многогранны и сложны, что лучшим способом их изучения часто является построение модели, отображающей лишь какую-то грань реальности и потому многократно более простой, чем эта реальность, и исследование вначале этой модели. Многовековой опыт развития науки доказал на практике плодотворность такого подхода.

В моделировании есть два заметно разных пути. Модель может быть похожей копией объекта, выполненной из другого материала, в другом масштабе, с отсутствием ряда деталей. Например, это игрушечный кораблик, самолетик, домик из кубиков и множество других натуральных моделей. Модель может, однако, отображать реальность более абстрактно - словесным описанием в свободной форме, описанием, формализованным по каким-то правилам, математическими соотношениями и т.д.

В прикладных областях различают следующие виды абстрактных моделей;

I) традиционное (прежде всего для теоретической физики, а также механики, химии, биологии, ряда других наук) математическое моделирование без какой-либо привязки к техническим средствам информатики;

II) информационные модели и моделирование, имеющие приложения в информационных системах;

III) вербальные (т.е. словесные, текстовые) языковые модели;

IV) информационные (компьютерные) технологии, которые надо делить

A) на инструментальное использование базовых универсальных программных средств (текстовых редакторов, СУБД, табличных процессоров, телекоммуникационных пакетов);

Б) на компьютерное моделирование, представляющее собой

- вычислительное (имитационное) моделирование;
- «визуализацию явлений и процессов» (графическое моделирование);
- «высокие» технологии, понимаемые как специализированные прикладные технологии, использующие компьютер (как правило, в режиме реального времени) в сочетании с измерительной аппаратурой, датчиками, сенсорами и т.д.

Итак, укрупненная классификация абстрактных (идеальных) моделей такова.

1. Вербальные (текстовые) модели. Эти модели используют последовательности предложений на формализованных диалектах естественного языка для описания той или иной области действительности (примерами такого рода моделей являются милицкий протокол, правила дорожного движения).

2. Математические модели - очень широкий класс знаковых моделей (основанных на формальных языках над конечными алфавитами), широко использующих те или иные математические методы. Например, можно рассмотреть математическую модель звезды. Эта модель будет представлять собой сложную систему уравнений, описывающих физические процессы, происходящие в недрах звезды. Математической моделью другого рода являются, например, математические соотношения, позволяющие рассчитать оптимальный (наилучший с экономической точки зрения) план работы какого-либо предприятия.

3. Информационные модели - класс знаковых моделей, описывающих информационные процессы (возникновение, передачу, преобразование и использование информации) в системах самой разнообразной природы.

Граница между вербальными, математическими и информационными моделями может быть проведена весьма условно; вполне возможно считать информационные модели

подклассом математических моделей. Однако, в рамках информатики как самостоятельной науки, отделенной от математики, физики, лингвистики и других наук, выделение информационных моделей в отдельный класс является целесообразным.

Отметим, что существуют и иные подходы к классификации абстрактных моделей; общепринятая точка зрения здесь еще не установилась. В частности, есть тенденция резкого расширения содержания понятия «информационная модель». при котором информационное моделирование включает в себя и вербальные, и математические модели.

Основное содержание данной главы связано с прикладными математическими моделями, в реализации которых используются компьютеры. Это вызвано тем, что внутри информатики именно компьютерное математическое и компьютерное информационное моделирование могут рассматриваться как ее составные части. Компьютерное математическое моделирование связано с информатикой технологически; использование компьютеров и соответствующих технологий обработки информации стало неотъемлемой и необходимой стороной работы физика, инженера, экономиста, эколога, проектировщика ЭВМ и т.д. Неформализованные вербальные модели не имеют столь явно выраженной привязки к информатике - ни в принципиальном, ни в технологическом аспектах.

Классификация математических моделей

К классификации математических моделей разные авторы подходят по-своему, положив в основу классификации различные принципы. Можно классифицировать модели по отраслям наук (математические модели в физике, биологии, социологии и т.д.) - это естественно, если к этому подходит специалист в какой-то одной науке. Можно классифицировать по применяемому математическому аппарату (модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, стохастических методов, дискретных алгебраических преобразований и т.д.) - это естественно для математика, занимающегося аппаратом математического моделирования. Наконец, человек, интересующийся общими закономерностями моделирования в разных науках безотносительно к математическому аппарату, ставящий на первое место цели моделирования, скорее всего заинтересуется такой классификацией:

- дескриптивные (описательные) модели;
- оптимизационные модели;
- многокритериальные модели;
- игровые модели;
- имитационные модели.

Остановимся на этом чуть подробнее и поясним на примерах. Моделируя движение кометы, вторгшейся в Солнечную систему, мы описываем (предсказываем) траекторию ее полета, расстояние, на котором она пройдет от Земли и т. д. , т. е. ставим чисто описательные цели. У нас нет никаких возможностей повлиять на движение кометы, что-то изменить.

На другом уровне процессов мы можем воздействовать на них, пытаясь добиться какой-то цели. В этом случае в модель входит один или несколько параметров, доступных нашему влиянию. Например, меняя тепловой режим в зернохранилище, мы можем стремиться подобрать такой, чтобы достичь максимальной сохранности зерна, т. е. оптимизируем процесс.

Часто приходится оптимизировать процесс по нескольким параметрам сразу, причем цели могут быть весьма противоречивыми. Например, зная цены на продукты и потребность человека в пище, организовать питание больших групп людей (в армии, летнем лагере и др.) как можно полезнее и как можно дешевле. Ясно, что эти цели, вообще говоря, совсем не совпадают, т.е. при моделировании будет несколько критериев, между которыми надо искать баланс.

Игровые модели могут иметь отношение не только к детским играм (в том числе и компьютерным), но и к вещам весьма серьезным. Например, полководец перед сражением в условиях наличия неполной информации о противостоящей армии должен разработать план: в каком порядке вводить в бой те или иные части и т.д., учитывая и возможную реакцию противника. Есть специальный достаточно сложный раздел современной математики - теория игр, - изучающий методы принятия решений в условиях неполной информации.

Наконец, бывает, что модель в большой мере подражает реальному процессу, т.е. имитирует его. Например, моделируя изменение (динамику) численности микроорганизмов в колонии, можно рассматривать много отдельных объектов и следить за судьбой каждого из них, ставя определенные условия для его выживания, размножения и т.д. При этом иногда явное математическое описание процесса не используется, заменяясь некоторыми словесными условиями (например, по истечении некоторого отрезка времени микроорганизм делится на две части, а другого отрезка - погибает). Другой пример - моделирование движения молекул в газе, когда каждая молекула представляется в виде шарика, и задаются условия поведения этих шариков при столкновении друг с другом и со стенками (например, абсолютно упругий удар); при этом не нужно использовать никаких уравнений движения. Можно сказать, что чаще всего имитационное моделирование применяется в попытке описать свойства большой системы при условии, что поведение составляющих ее объектов очень просто и четко сформулировано. Математическое описание тогда производится на уровне статистической обработки результатов моделирования при нахождении макроскопических характеристик системы. Такой компьютерный эксперимент фактически претендует на воспроизведение натурального эксперимента: на вопрос «зачем же это делать» можно дать следующий ответ: имитационное моделирование позволяет выделить «в чистом виде» следствия гипотез, заложенных в наши представления о микрособытиях, очистив их от неизбежного в натурном эксперименте влияния других факторов, о которых мы можем даже не подозревать. Если же, как это иногда бывает, такое моделирование включает и элементы математического описания событий на микроуровне, и если исследователь при этом не ставит задачу поиска стратегии регулирования результатов (например, управления численностью колонии микроорганизмов), то отличие имитационной модели от дескриптивной достаточно условно; это, скорее, вопрос терминологии.

Литература

1. Турецкий, Владимир Яковлевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие для вузов/В. Я. Турецкий.-3-е изд., перераб. и доп.-М.:ИНФРА-М,2008.-557, [1] с.:ил.-(Высшее образование)
2. Математика и информатика: Учебное пособие для вузов/[Н. Л. Стефанова, В. Д. Будаев, Е. Ю. Яшина и др.]; Под ред. В. Д. Будаева, Н. Л. Стефановой.-М.:Высшая школа,2004.-348, [1] с.:ил.
3. Могилев А.В. и др. Информатика: Учебное пособие для студентов педвузов. / А.В. Могилев, Н.И. Пак, Е.К. Хеннер / Под ред. Е.К. Хеннера. — М.: Изд. центр «Академия», 2000. — 816 с.
4. Козлов, Владимир Николаевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие для вузов/В. Н. Козлов.-СПб.:Питер,2004.-265 с.:ил.-(Учебное пособие)
5. Мозговой, Максим В. Классика программирования : алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы [Текст]: практический подход/М. В. Мозговой ; [под ред. М. В. Финкова].-СПб:Наука и Техника,2006.-320 с.:ил.-(Секреты мастерства)
6. Могилев, Александр Владимирович. Практикум по информатике [Текст]: [учебное пособие для вузов]/А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер ; под ред. Е. К. Хеннера.-3-е изд., испр.-М.:Академия,2006.-606, [1] с.:ил.-(Высшее профессиональное образование) .
7. Информатика [Текст]: базовый курс : учебное пособие для вузов/под ред. С. В. Симоновича.-2-е изд.-СПб.:Питер,2009.-639 с.:ил.-(Учебник для вузов)
8. Игошин, Владимир Иванович. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст]: учебное пособие для вузов/В. И. Игошин.-2-е изд., стереотип.-М.:Академия,2008.-446, [1] с.-(Высшее профессиональное образование) .
9. Жолков, Сергей Юрьевич. Математика и информатика для гуманитариев [Текст]: учебник для вузов/С. Ю. Жолков.-Изд. 2-е, испр. и доп.-М.:Альфа-М [и др.],2005.-527 с.:ил.
10. Власов, Владимир Алексеевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие/В. А. Власова, И. В. Машковцев, М. В. Корзик ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО ТГПУ.-Томск:издательство ТГПУ,2007.-99 с.:ил.
11. Перегудов, Феликс Иванович Тарасенко, Феликс Петрович. Введение в системный анализ. [Учеб. пособие для вузов]. -М.. Высш.школа ,1989. -367с.. ил.