

Основы математической обработки информации

Учебно-методическое пособие

составители: Смирнов М.А., Беккерман Е.Н., Литвинова А.В., Пьяных Е.Г., Лобода Ю.О.

Томск - 2012

Оглавление

Введение.....	3
Математическая логика.....	4
Множества и отношения.....	6
Комбинаторика.....	8
Элементы теории вероятностей и математическая статистика.....	9
Статистика.....	10
Математические модели	13
Литература.....	14

Введение

Учебно-методическое пособие по курсу **«Основы математической обработки информации»** ставит целью помочь студентам дневного, заочного и дистанционного обучения в освоении курса. Основное содержание пособия составляют упражнения, задания и контрольные вопросы по курсу.

При изучении каждой темы студенту необходимо проработать материал по одноименному учебному пособию, подкрепить знания чтением указанной литературы, затем выполнить задания, упражнения по данной теме и ответить на контрольные вопросы.

В целом, работа может помочь более успешному усвоению курса **«Основы математической обработки информации»**, изучение которого направлено на формирование математической культуры и развитие информационно-коммуникационной компетентности будущего специалиста.

Для успешной сдачи зачёта по данному курсу необходимо решить по два задания из каждого раздела.

Математическая логика

Задачи и упражнения

Задача 1

Переведите на язык алгебры логики следующие высказывания:

1. Если светит солнце, то для того, чтобы не было дождя и достаточно, чтобы дул ветер.
2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.
3. Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.
4. Если ветра нет, то для дождя необходима пасмурная погода.
5. Если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет. Но дождь идет. Значит, нет ветра.
6. Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра.
7. Если для солнечной погоды необходимо отсутствие дождя, то для того, чтобы пошел дождь, достаточно, чтобы погода была пасмурной и безветренной.

Указание: для перевода на язык алгебры логики необходимо каждый раз предварительно выделить элементарные высказывания. Например: «светит солнце» можно обозначить буквой S , «дует ветер» — буквой V , «идет дождь» — буквой D .

Задача 2

Пусть p и q обозначают высказывания:

p — «Я учусь в школе»,

q — «Я люблю математику».

Прочтите следующие высказывания:

1. \bar{p}
2. $\overline{\bar{p}}$
3. $p \wedge q$
4. $\overline{p \wedge q}$
5. $\bar{p} \wedge \bar{q}$
6. $p \wedge \bar{q}$
7. $\bar{p} \vee \bar{q}$

Задача 3

Введем следующие обозначения

x — "7 - простое число"

y — "8 - простое число"

Какие из предложений ложны, а какие истинны

1. x, \bar{x}, y, \bar{y}
2. $x \wedge y, x \wedge \bar{y}, \bar{x} \wedge y, \bar{x} \wedge \bar{y}$
3. $x \vee y, x \vee \bar{y}, \bar{x} \vee y, \bar{x} \vee \bar{y}$

Задача 4

Не составляя таблицы истинности проверить, являются ли следующие формулы тождественно истинными или тождественно ложными:

1. $p \vee \bar{p}, p \wedge \bar{p}, p \wedge \overline{p \vee \bar{p}}$
2. $p \Rightarrow p, \bar{p} \Rightarrow p, p \Rightarrow \bar{p}$
3. $p \Leftrightarrow p, \bar{p} \Leftrightarrow p, p \Leftrightarrow \bar{p}$
4. $(p \wedge p) \Rightarrow p, (p \wedge \bar{p}) \Rightarrow p$
5. $(p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow p, (p \wedge \bar{p}) \Leftrightarrow p$

Задача 5

Составьте таблицы истинности для формул:

1. $(x \vee y) \Rightarrow (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{x} \Rightarrow \bar{y})$
2. $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$
3. $(x \wedge y) \Leftrightarrow (x \vee y)$
4. $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$
5. $(x \vee y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)$
6. $(x \vee y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)$
7. $(x \wedge y) \vee z$
8. $x \wedge \bar{y} \Rightarrow (y \vee \bar{x} \Rightarrow x)$
9. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{z})$
10. $((x \Rightarrow z) \Leftrightarrow \bar{y}) \wedge x$

Задача 6

1. Известно, что импликация $x \Rightarrow y$ истинна, а эквивалентность $x \Leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \Rightarrow x$?
2. Известно, что эквивалентность $x \Leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значениях $\bar{x} \Leftrightarrow y$ и $x \Leftrightarrow \bar{y}$?
3. Известно, что x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликации $\bar{x} \Rightarrow (y \vee x)$ и $\bar{x} \wedge y \Rightarrow z$?
4. Известно, что $x \Rightarrow y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \Rightarrow (x \Rightarrow y)$, $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y$, $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$?

Задача 7

Найдите логические значения x и y , при которых выполняются равенства:

1. $(1 \Rightarrow x) \Rightarrow y = 0$
2. $x \wedge y = \bar{x}$

Задача 8

Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

1. $x \wedge (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)$
2. $(x \Leftrightarrow (y \vee z)) = (x \Leftrightarrow y) \vee (x \Leftrightarrow z)$
3. $x \vee (y \Leftrightarrow z) = (x \vee y) \Leftrightarrow (x \vee z)$
4. $x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)$
5. $x \wedge (y \Leftrightarrow z) = (x \wedge y) \Leftrightarrow (x \wedge z)$
6. $x \wedge (y \Leftrightarrow z) = (x \wedge y) \Leftrightarrow (x \wedge z)$
7. $x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)$
8. $x \Leftrightarrow (y \Rightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow z)$

Задача 9

Используя основные равносильности, доказать равносильность формул U и B, когда:

1. $U = \bar{x} \bar{z} \vee xy \vee x \bar{z}; \quad B = z \Rightarrow xy;$

2. $U = (x \Rightarrow) \Rightarrow (\overline{x \bar{y} \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)}); B = x \bar{y} \wedge \bar{y} x;$
3. $U = x \Rightarrow (xy \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) z); B = y \Rightarrow (x \Rightarrow z);$
4. $U = (\overline{x \wedge (y \Rightarrow z)}) \vee (x \Rightarrow z); B = (x \Rightarrow y) \vee z;$
5. $U = ((\bar{z} \vee y) \vee x) \Leftrightarrow \bar{x} z; B = xy (\overline{z \Leftrightarrow y}) z \Leftrightarrow 1;$
6. $U = ((x \vee y) \Leftrightarrow z) \wedge xyz; B = xyz \Leftrightarrow 1.$

Задача 10

Выразить все основные операции:

1. через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2. через конъюнкцию и отрицание;
3. через дизъюнкцию и отрицание;
4. через импликацию и отрицание.

Задача 11

Выразить отрицание импликации через основные операции так, чтобы отрицания стояли только над простыми высказываниями. Выразить операция дизъюнкция через импликацию. Доказать, что операция отрицания не может быть выражена через основные операции (бинарные) над высказываниями.

Задача 12

Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или в кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку купаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика выполнено? В ответе отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях.

Множества и отношения

Задачи и упражнения

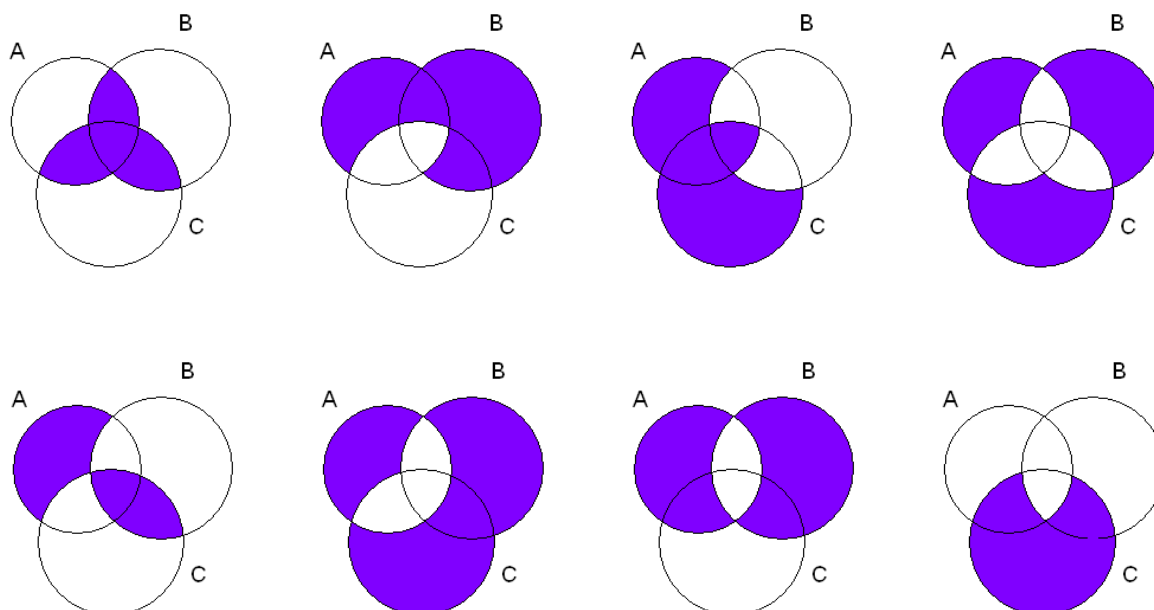
Задача 1

Найти объединение, пересечение и обе разности между следующими множествами:

1. $A = \{a: a \in \mathbb{N}, a < 20, a - \text{четное}\}$ $B = \{b: b \in \mathbb{N}, b < 20, b - \text{нечетное}\}$
2. $A = \{a: a \in \mathbb{N}, a < 20, a - \text{нечетное}\}$ $B = \{b: b \in \mathbb{N}, b < 20, b - \text{простое}\}$
3. $A = \{a: a \in \mathbb{N}, a < 20, a < 15\}$ $B = \{b: b \in \mathbb{N}, b < 20, b > 7\}$
4. произвольное непустое множество A , $B = \emptyset$
5. произвольное непустое множество A , $B = A$

Задача 2

Записать формулу, описывающую закрашенную часть множества:



Задача 3

Нарисовать диаграммы Венна для следующих формул:

1. $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$
2. $A \setminus (B \cap C)$
3. $(A \setminus B) \cap C$
4. $(A \cup C) \setminus B$
5. $A \cup (C \setminus B)$

Задача 4

Множество A состоит из n элементов, а множество B - из p элементов, причем $n < p$. Какое максимальное и минимальное количество элементов могут содержать множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Задача 5

Нарисовать диаграмму Венна, иллюстрирующую множества A, B, C , где A - множество равнобедренных треугольников, B - множество равносторонних треугольников, C - множество прямоугольных треугольников.

Задача 6

Множество $A = \{1, 3, 5\}$, множество $B = \{2, 4, 5\}$. Записать декартово произведение $A \times B$ и бинарное отношение:

1. $\rho_1 = \{(a, b) : a < b\}$
2. $\rho_2 = \{(a, b) : a > b\}$
3. $\rho_3 = \{(a, b) : b \text{ делится без остатка на } a\}$

Задача 7

На множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано бинарное отношение. Является ли оно симметричным, антисимметричным, рефлексивным и транзитивным? Является ли бинарное отношение

отношением порядка или отношением эквивалентности?

1. $\Theta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,4), (2,1), (4,1)\}$
2. $\Theta = \{(1,2), (1,4), (1,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$
3. $\Theta = \{(1,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$
4. $\Theta = \{(1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$

Задача 8

Задано бинарное отношение между множествами $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4, 5\}$. Является ли оно отображением? Если это отображение, то является ли оно инъективным или сюръективным?

1. $\Theta = \{(1,2), (3,4), (5,5), (5,2)\}$
2. $\Theta = \{(1,2), (3,4), (5,5)\}$
3. $\Theta = \{(1,2), (3,4)\}$
4. $\Theta = \{(1,2), (3,2), (5,2)\}$

Комбинаторика

Задачи и упражнения

Задача 1

В заплыве участвуют три спортсмена. Сколькими разными способами могут распределиться первое, второе и третье места на финише? Решите ту же задачу для семи пловцов?

Задача 2

Из студенческой группы выбирают семь человек в команду для участия в олимпиаде. Сколько различных команд можно составить, если в группе 15 человек? 25 человек?

Задача 3

Сколько различных буквосочетаний можно составить из букв с, т, к, о? Сколько из них будет четырехбуквенных, трехбуквенных и двухбуквенных?

Задача 4

В урне находятся три белых и три черных шара. Наугад вынимаю два шара. Сколькими различными способами можно достать два шара так, чтобы они оба были одного цвета? Разных цветов?

Задача 5

Монету подбрасывают трижды. Сколько вариантов сочетаний орлов и решек в серии из трех бросаний таких, что орлов выпало больше, чем решек.

Задача 6

В урне лежат шары трех цветов:

белых - 8 штук
черных - 5
красных 2

Сколькими возможными способами можно вынуть из этой урны три шара так, чтобы они были

1. все одинакового цвета
2. все разных цветов.

Сколькими возможными способами можно вынуть из этой урны 6 шаров так, чтобы они были

1. все одинакового цвета
2. поровну белых, черных и красных

Элементы теории вероятностей и математическая статистика

Задачи и упражнения

Задача 1

Опыт заключается в подбрасывании двух монет. Событие A - первая монета упала вверх "орлом", событие B - вторая монета упала "орлом". Выразить через события A и B следующие случайные события:

1. обе монеты упали вверх "орлом"
2. первая монета упала вверх "решкой", а вторая "орлом"
3. ровно одна из монет упала вверх "орлом"
4. хотя бы одна монета упала вверх "решкой"

Решение:

1. Оба события A и B наступили, то есть произошло событие $A * B$
2. В случае с первой монетой произошло событие, противоположное событию A , то есть событие \bar{A} , а в случае со второй монетой произошло событие B , таким образом рассматриваемое событие записывается как $\bar{A} * B$
3. для того чтобы ровно одна из монет упала вверх орлом, нужно чтобы одна из монет упала "орлом", а другая - "решкой"; то есть первая монета - "орел", а вторая - "решка" ($A * \bar{B}$) или первая монета - "решка", а вторая - "орел" ($\bar{A} * B$); появление хотя бы одного из двух событий - это сумма событий, таким образом искомое событие выражается как сумма $A * \bar{B} + \bar{A} * B$
4. $\bar{A} + \bar{B}$

Задача 2

Определить множество элементарных исходов опыта с бросанием двух монет. Будет ли предложенное множество полной группой попарно несовместных событий? Будут ли элементарные исходы равновероятными? Ответьте на те же вопросы для следующего опыта: бросаем две игральные кости, вычисляем сумму очков на верхних гранях.

Задача 3

Какие из перечисленных событий являются невозможными, какие достоверными, а какие случайными

1. достать черный шар из урны с белыми шарами
2. достать черный шар из урны с черными шарами
3. достать черный шар из урны с 3 белыми и 5 черными шарами

Задача 4

Из колоды карт наугад вынимается одна карта. Найти вероятность следующих событий:

1. карта черной масти
2. валет

3. трефа
4. дама бубен

Задача 5

Проводится опыт с бросанием одной игральной кости. Выберите из перечисленных событий пары несовместных событий

1. четное число
2. нечетное число
3. единица
4. число меньше пяти
5. число больше двух
6. четверка
7. простое число
8. число больше трех
9. число меньше трех

Задача 6

Из колоды карт наугад вынимается две карты. Найти вероятность следующих событий:

1. обе карты - дамы
2. первая карта - дама, а вторая - валет
3. ровно одна из карт - дама
4. одна карта дама, а другая валет
5. хотя бы одна из карт дама

Статистика

Задачи и упражнения

Задача 1

В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	6	8	10
p_i	0,4	0,2	___	0,1	0,2

Чему равно значение относительной частоты при $x=6$?

Решение

Чтобы решить данную задачу, необходимо помнить, что сумма относительных частот равна единицы. Тогда при $x=6$ относительная частота $p_i=0,1$

Задача 2

Сдача экзамена у студентов первого курса заняла 23, 20, 28, 22, 23, 28 минут. Объем данной выборки равен...?

Решение

Количество элементов в выборке называется её объёмом и обозначается n , следовательно $n=6$.

Задача 3

Среднее выборочное вариационного ряда 1,2, 2, 3, 3, 4, 6 равно...?

Решение

Для нахождения среднего выборочного воспользуемся формулой:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

где x_i -варианты с порядковым номером i ; $\sum_{i=1}^k n_i = n$ - объем совокупности (число элементов совокупности); n_i - частота варианта x_i , k - число варианта.

Получим: $\bar{x} = \frac{1 + 2 * 2 + 3 * 2 + 4 + 6}{7} = 3$

Задача 4

Дано статистическое распределение выборки

ξ_i	2	4	6	8	10
n_i	1	2	k	2	1

Если объем выборки равен 10, то $k = \dots$?

Решение

Если объем выборки $n=10$, а это есть количество элементов выборки, то $k=10-6=4$.

Задача 5

В результате 10 опытов получена следующая выборка 3,3,3,4,4,4,5,5,6,6. Для нее законом распределения будет...?

Решение

x_i	3	4	5	6
p_i	0,3	0,3	0,2	0,2

где x_i -варианты с порядковым номером i ; p_i — относительная частота.

Задача 6

Дана выборка 0.1, 0, 0.2, -0.1, 0, -0.2, 0, 0.3, -0.1. Тогда его выборочная мода равна?

Решение

Модой называется варианта, имеющая наибольшую частоту, следовательно $M_0=0$.

Задача 7

Дана выборка 10, 11, 12, 14, 10. Тогда его выборочная медиана равна...?

Решение

Медианой называется варианта, расположенная в центре ранжированного ряда, следовательно $M_e=11$.

Задача 8

В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	—	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x=3$, будет равно?

Задача 9

В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	4	8	10	12	20
p_i	—	0,2	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x=4$, будет равно?

Задача 10

По статистическому распределению выборки

x_i	2	4	6
n_i	2	8	4

Установите ее объем.

Задача 11

В результате 10 опытов получена следующая выборка 5,5,7,8,8,8,8,9,9,9. Для нее законом распределения будет...?

Задача 12

Дана выборка 1.5, 1.6, 1.6, 1.4, 1.7, 1.6, 1.7, 1.4 Тогда его выборочная мода равна?

Задача 13

Дана выборка -10, -12, -13, -9, -4. Тогда его выборочная медиана равна...?

Задача 14

В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	2	6	7	11
p_i	0,1	0,1	0,1	—	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x=7$, будет равно?

Задача 15

По статистическому распределению выборки установите ее объем

x_i	2	5	8
n_i	1	2	4

Задача 16

В результате 10 опытов получена следующая выборка 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5. Для нее законом распределения будет...?

Задача 17

Дана выборка -0.15, -0.13, -0.12, -0.13, -0.15, -0.13, -0.11. Тогда его выборочная мода равна?

Задача 18

Дана выборка 29,32,28, 26, 31, 30, 28. Тогда его выборочная медиана равна...?

Задача 19

Среднее выборочное вариационного ряда 1,2, 3, 3, 7,8 равно...?

Задача 20

В результате 10 опытов получена следующая выборка: 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 9. Для нее законом распределения будет...?

Математические модели

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает понятие «модель» в научном познании?
2. Какие типы моделей существуют?
3. Что такое «информационная модель»?
4. Что такое «объект» с точки зрения информационного моделирования? Какие типы объектов можно различать?
5. Что такое «атрибуты»? Какими они бывают?
6. Что такое «связь»? Какие типы связи различают?
7. Разработайте примеры древовидных структур данных из окружающей реальности.
8. Виды моделей: физические, математические: вычислительные, имитационные.
9. Бинарные отношения.
10. Функция как математическая модель.
11. Процессы и явления, описываемые с помощью функций.
12. График функции как модель процесса и явления.
13. Интерпретация результатов исследования функции в соответствии с условиями задачи. Примеры.
14. Уравнения и неравенства как математические модели. Интерпретация результатов решения уравнений и неравенств.

Литература

1. Турецкий, Владимир Яковлевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие для вузов/В. Я. Турецкий.-3-е изд., перераб. и доп.-М.:ИНФРА-М,2008.-557, [1] с.:ил.-(Высшее образование)
2. Математика и информатика: Учебное пособие для вузов/[Н. Л. Стефанова, В. Д. Будаев, Е. Ю. Яшина и др.]; Под ред. В. Д. Будаева, Н. Л. Стефановой.-М.:Высшая школа,2004.-348, [1] с.:ил.
3. Могилев А.В. и др. Информатика: Учебное пособие для студентов педвузов. / А.В. Могилев, Н.И. Пак, Е.К. Хеннер / Под ред. Е.К. Хеннера. — М.: Изд. центр «Академия», 2000. — 816 с.
4. Козлов, Владимир Николаевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие для вузов/В. Н. Козлов.-СПб.:Питер,2004.-265 с.:ил.-(Учебное пособие)
5. Мозговой, Максим В. Классика программирования : алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы [Текст]: практический подход/М. В. Мозговой ; [под ред. М. В. Финкова].-СПб.:Наука и Техника,2006.-320 с.:ил.-(Секреты мастерства)
6. Могилев, Александр Владимирович. Практикум по информатике [Текст]: учебное пособие для вузов/А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер ; под ред. Е. К. Хеннера.-3-е изд., испр.-М.:Академия,2006.-606, [1] с.:ил.-(Высшее профессиональное образование) .
7. Информатика [Текст]: базовый курс : учебное пособие для вузов/под ред. С. В. Симоновича.-2-е изд.-СПб.:Питер,2009.-639 с.:ил.-(Учебник для вузов)
8. Игошин, Владимир Иванович. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст]: учебное пособие для вузов/В. И. Игошин.-2-е изд., стереотип.-М.:Академия,2008.-446, [1] с.-(Высшее профессиональное образование) .
9. Жолков, Сергей Юрьевич. Математика и информатика для гуманитариев [Текст]: учебник для вузов/С. Ю. Жолков.-Изд. 2-е, испр. и доп.-М.:Альфа-М [и др.],2005.-527 с.:ил.
10. Власов, Владимир Алексеевич. Математика и информатика [Текст]: учебное пособие/В. А. Власова, И. В. Машковцев, М. В. Корзик ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО ТГПУ.-Томск:издательство ТГПУ,2007.-99 с.:ил.
11. Перегудов, Феликс Иванович Тарасенко, Феликс Петрович. Введение в системный анализ. [Учеб. пособие для вузов]. -М.. Высш.школа ,1989. -367с.. ил.