Министерство образования Российской Федерации
Томский государственный педагогический университет

В.Г. Букреев

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Часть 1

Учебное пособие

Томск 2004

УДК 62-505.3
Б 90

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Томского государственного
педагогического университета

Б 90

Букреев В.Г. Основы математического моделирования и прогнозирования экономических систем. Ч.1: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. доп. Томск: Центр учебно-методической литературы ТГПУ, 2004. 104 с.

В учебном пособии рассматриваются общие принципы построения моделей предприятий и организаций как объектов организационно-экономических систем (ОЭС). Приведены примеры линейных непрерывных и дискретных моделей некоторых процессов, протекающих в экономических системах. Достаточно подробно рассмотрен один из методов оптимизации ОЭС – метод линейного программирования. В приложении учебного пособия отражены основные матричные преобразования, необходимые для исследования ОЭС, и типовые задачи по рассматриваемым вопросам.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 060700 «Национальная экономика».

УДК 62-505.3
Б 90

Рецензенты:
д.т.н., проф., зав. кафедрой прикладной математики ТГУ Ю.И. Параев
к.э.н., доц., зав. кафедрой экономики и методики преподавания ТГПУ И.А. Ромахина

Введение

Традиционный курс математики в высшем учебном заведении предполагает несколько формальное отношение студентов и слушателей к изучаемому предмету. Эта дисциплина обычно преподается по хорошо разработанной программе, подчёркивающей основные принципы математики и необходимость строгого анализа математических уравнений. Распространённая черта специалистов различных отраслей экономики – их определённая растерянность перед прикладными задачами, возникающими непосредственно из практики и требующими построения математических моделей. Одним из решений такой проблемы следует считать введение в учебный план подготовки специалистов такой дисциплины, главной целью которой было бы обучение методам постановки математических задач, возникающих в реальных практических ситуациях. Общее название такой дисциплины – математическое моделирование. Специалисты разных направлений, связанные с приложением математики, ясно представляют, что математическое моделирование – это в некоторой степени искусство применения математики и системного анализа. Очевидно, что в полной мере искусством построения моделей можно овладеть только в результате собственной практики. Большинство специалистов считает, что приложение математики к решению отраслевых задач сводится к набору формул, подстановке в них некоторых чисел, в результате чего получается ответ. При этом упускается из виду один важный момент, без которого «приложение» математики превращается в демонстрацию известных математических приёмов. Упущенный момент заключается в описании так называемого «реального мира» языком математики, что позволяет получить более точное представление его наиболее существенных свойств и предсказать будущие события. Это обстоятельство и отражает термин «математическое моделирование».

Целью прикладной математики является математическое осмысление действительности. С другой стороны, исследователю - практику более важно получить конкретные ответы на конкретные вопросы. На практике исходным пунктом является некоторая эмпирическая ситуация, выдвигающая перед исследователем задачу, на которую следует найти ответ. Ввиду сложности взаимодействия с окружающей средой точное описание ситуации является затруднительным. Поэтому процесс математического анализа задачи чаще всего бывает продолжительным и требует владения многими навыками, в том числе не имеющими отношения к математике. Например, обсуждения с коллегами - не математиками, работающими в данной области знаний, и изучение всевозможной литературы, имеющей отношение к делу. Обычно параллельно с постановкой задачи идёт процесс выявления основных или существенных особенностей явления. Для физических явлений идеализация играет решающую роль, поскольку в реальном явлении участвуют множество процессов. Причём некоторые черты явления представляются важными, другие – несущественными.

Следующий этап после выявления существенных факторов состоит в переводе этих факторов на язык математических понятий и величин, а также определения соотношений между величинами. Как правило, данный этап является самым трудным этапом процесса моделирования. После построения модели явления её следует проверить на адекватность реальным процессам. Уравнения и другие математические соотношения сопоставляются с исходной ситуацией. Например, сравниваются размерности величин, входящие в уравнение. Далее, математическая основа модели должна быть непротиворечивой и подчиняться законам математической логики. Кроме того, справедливость модели зависит от её способности достаточно точно описывать исходную ситуацию. Модель можно заставить отражать действительность, однако она не есть сама действительность. Достаточно ли хорошо для целей рассматриваемой задачи результаты, полученные на основе этой модели, отражают положение дел? Таким образом, решение одной и той же задачи зависит от критериев, выдвинутых автором модели, в такой же степени, как и от установления физических, экономических и любых других характеристик исходной ситуации. Можно потратить много времени на улучшение решения для модели, которое не оправдано самой постановкой задачи, например определение степени точности опытных данных. Так, если имеющиеся исходные данные известны с точностью 5%, то нет смысла предлагать решения, обеспечивающие точность 1%. Во многих случаях приближенный ответ, который получается быстрее, может оказаться более эффективным, чем точный ответ, на получение которого уходит больше времени. Это часто свидетельствует в пользу непосредственного численного приближенного решения, позволяющего избежать затрат времени на поиски точного аналитического решения. Напомним, что главное назначение модели – это необходимость предсказывать новые результаты или новые свойства явления. Эти предсказания могут быть связаны с распространением уже существующих результатов или иметь более принципиальный характер в будущем. С другой стороны, предсказания могут относиться к событиям, непосредственное экспериментальное исследование которых неосуществимо (например прогноз экономической ситуации сложных производственных систем).

Математическая модель может также представлять собой упрощение реальной ситуации. В результате исходная, чаще всего сложная, задача сводится к идеализированной задаче, решение которой значительно упрощается. Именно при таком подходе в классической прикладной математике возникли блоки без трения, невязкие жидкости и многое другое. Это одна сторона упрощения. Другая сторона связана со сравнением порядка различных величин, фигурирующих в модели. Например, изменение некоторой переменной x описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$ax'' + bx' + cx = 0. \tag{B.1}$$

При этом второе слагаемое bx' много больше по величине, чем значения cx. В результате исходное уравнение принимает вид

$$ax'' + bx' \approx 0. \tag{B.2}$$

Следовательно, можно сократить время вычислений, не учитывая слагаемое cx. Решение исходного уравнения получится быстрее, и при этом оно будет достаточно точно отражать ситуацию. Таким образом, первым шагом является построение простых моделей нескольких наиболее характерных особенностей явления. Затем эти модели обобщаются, чтобы охватить другие факторы, пока не будет найдено «приемлемое» решение. Другим подходом при построении математической модели является то, что с самого начала вводится в рассмотрение одновременно большое количество факторов. Это часто применяется при исследовании операций, и такие модели обычно изучают имитационными методами с использованием ЭВМ.

Важнейшее решение, которое часто принимается в самом начале процесса моделирования, касается природы рассматриваемых математических переменных. По существу, они делятся на два класса. В один из них входят переменные, которые можно достаточно точно измерить. Такие переменные называются *детерминированными*. В другой класс входят переменные, которые не могут быть точно измерены и имеют случайный характер. Такие переменные называются *стохастическими*. Математические модели, содержащие стохастические переменные, описываются математическим аппаратом теории вероятности и статистики.

Определяющим вопросом при исследовании процессов является вопрос интерпретации выводов, вытекающих из моделирования. Работа математика не заканчивается в тот момент, когда после многочисленных выкладок и математических преобразований получается формула или иной логический результат. Необходимо совершить обратный перевод с математического языка на язык, на котором первоначально формулировалась исходная проблема. Очевидно, что полученные результаты исследований должны быть понятны и для коллег не математиков.

Глава 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Состояние экономической системы можно определить как минимальное количество информации, необходимое для описания её поведения в любой текущий момент времени. Тогда, начиная с некоторого момента времени при известных законах функционирования системы, входных воздействиях и возмущениях, можно полностью описать её поведение в любой будущий момент времени. При анализе систем на основе классической теории регулирования в терминах «вход-выход» непосредственно рассматривается не структура системы, а подмножество упорядоченных пар входо-выходных данных (отношений вход-выход). Это отношение называется *передаточной функцией*. Зная такую функцию, можно построить представление системы в пространстве состояний. Причём состояния системы соответствуют множеству входных воздействий, которые переводят систему из начального состояния в некоторое заданное состояние. Непременным условием при этом является фиксированное (стационарное) начальное состояние системы (строгая формулировка этого условия требует нулевого начального состояния). Современная теория систем управления экономическими системами обязательно включает в законы и алгоритмы управления информацию о внутренней структуре системы. При этом снимается упомянутое ограничение о фиксированном начальном состоянии системы.

Например, в производственных системах под **состоянием** понимается **объём продукции или «поток».** Объём продукции представляет собой величину, фиксированную в **данный (текущий) момент времени.** То же самое предполагается по отношению к **запасам и основным фондам.** С другой стороны, **доходы и издержки** представляются в виде потока, определенного на конечном интервале времени. Понятия **выпуска и потребления** также относятся к потоку.

Уравнение состояния выражает наблюдаемые различия между состояниями системы в различные моменты времени. Последовательность этих состояний подразумевает движение системы и наличие упорядоченных процессов, которыми объясняется, каким образом система переходит из одного состояния в другое. Как и любая другая логическая схема, призванная обеспечить понимание происходящего, уравнение состояния должно давать возможность предсказывать то, что может случиться при условии наличия предположений о текущем состоянии и предыстории системы. Состояние также может быть оценкой, нечётким множеством, которое представляет собой некоторую функцию. Обычно уравнения состояния, которые используются для описания экономической системы, лишь аппроксимируют её реальное поведение. Одним из условий, чтобы математическая модель была полезной, является следующее: малые изменения в уравнениях состояния должны приводить к малым изменениям в поведении системы. При выполнении этого условия система будет структурно устойчивой. Когда же последствием непрерывно изменяющегося управления являются резкие изменения в системе, процесс должен описываться теорией катастроф.

Математические уравнения в пространстве состояния могут быть записаны в алгебраической или дифференциальной форме (форма Коши). Все эти уравнения могут быть скалярными или матричными.

1.1. Общие принципы формирования моделей

Модель – это упрощенное представление системы или объекта, предназначенное для исследования возможных процессов. В сфере экономики модели могут использоваться с целью снижения затрат и обеспечения безопасности исследований реальной экономической системы.

Построение моделей можно разбить на следующие этапы:

1. Этап формирования модели. Этот этап обычно начинается со словесно-смыслового (логико-лингвистического) описания системы, объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе системы, объекта и целях исследования данный этап должен содержать некоторые предположения, например линейность характеристик.
2. Этап завершения идеализации системы, объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для оценки поведения системы, объекта. Например, при составлении уравнения запасов рассматривается только основное производство. Идеализирующие предположения по возможности записываются в математической форме, чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.
3. Этап формулировки законов движения системы, объекта. На данном этапе переходят к формулировке или выбору закона,

которому подчиняется система, объект и запись законов в математической форме. Следует иметь в виду, что даже для простых систем, объектов выбор соответствующего закона является не тривиальной задачей.

4. Этап формирования цели исследования. Формулировку модели завершает её «оснащение». Задаются сведения о начальном состоянии системы, объекта или иные характеристики, без знания которых невозможно определить их поведение. На этом же этапе формулируется цель исследования модели.
5. Этап исследования модели. Созданная модель изучается всеми методами, которые доступны исследователю. Здесь возможна взаимная проверка различных подходов. Необходимо учитывать, что большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо использовать вычислительные методы. Это особенно важно при изучении нелинейных систем, объектов, так как их качественное поведение, как правило, заранее неизвестно.
6. Этап достижения цели исследования модели и установления её адекватности – соответствие системе, объекту и сформулированным предположениям. Адекватность устанавливается сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами. Неадекватная модель может дать результат, существенно отличающийся от истинного состояния системы, объекта. В этом случае данная модель должна быть отброшена или соответствующим образом модифицирована.

По физическим принципам реализации модели делятся на следующие типы: математические, полунатурные, натурные. Математические модели бывают двух видов: аналитические и имитационные (например, электронное моделирование, демонстрационные зоны). Имеются следующие формы записи моделей:

- логико-лингвистическое описание (применяется на ранних этапах разработки решений);
- графическое представление (используется в совокупности с другими формами);
- описание в виде блок-схемы или матриц данных (используется при описании структуры системы или логических операций);
- описание в виде формул, выражений или математических операций (широко используется в современной теории управления).

Основные требования к моделям:

- отвечать требованиям функциональной полноты и возможности анализа достаточно большого числа вариантов;

- быть достаточно абстрактной, но без потери физического смысла и возможности оценки полученных результатов;
- удовлетворять ограничениям на время и объём вычислений (особенно для режима реального времени);
- позволять использование методов оптимизации исследуемых процессов (особенно в социально-экономических системах);
- предусматривать возможность проверки её соответствия реальному процессу;
- обладать свойством робастности – устойчивости по отношению к ошибкам в исходных данных (особенно важно при низкой точности исходных данных в современной практике рыночной экономики).

Модель может быть детерминированная – при условии независимости её параметров от времени. Исследование данной модели осуществляется в аналитическом виде либо численными методами на ЭВМ.

Для моделирования экономических и организационных систем, которые характеризуются сложностью связей, неопределённостью структуры и параметров, целесообразно использовать системный подход. Общими элементами системного подхода являются:

- множества переменных состояния и параметров;
- модели, связывающие параметры и переменные состояния;
- целевые функции, зависящие от переменных состояния и параметров моделей;
- вычислительные методы, позволяющие получить количественные значения оцениваемых результатов.

Рассматривая, например, финансово-экономические задачи, можно определить следующий алгоритм для формирования математических моделей. На начальном этапе определяется концептуальная финансово-экономическая модель, которая предполагает первоначальные упрощения и условия для формализации. В свою очередь, концептуальная финансово-экономическая модель конкретизируется с помощью производственно-экономической модели. Изменение внешних и внутренних условий получения прибыли отражается в нестационарной модели стоимости активов, приносящих доход. Далее все потоки денежных средств от активов, приводятся к одному моменту времени в прошлом или будущем. Для этого используются модели накопления финансовых ресурсов, которые должны учитывать случайный характер финансовых операций. С целью определения субъективной функции полезности конкретных результатов используется система моделей субъективной полезности. Конкретный выбор того или иного решения осуществляется на основе моделей и методов принятия решений. В силу большого количества переменных и параметров для принятия окончательных решений целесообразно использовать математические методы линейного и нелинейного программирования.

1.2. Краткая характеристика математических методов при исследовании экономических систем

Математические методы используются в следующих случаях:

- система, объект или процесс описывается математической или имитационной моделью;
- имеются соответствующие массивы количественных данных.

По признаку используемого математического аппарата можно выделить следующие методы:

- классической математики;
- прикладной математики.

Методы классической математики включают:

- математический анализ;
- теорию вероятностей.

Методы математического анализа включают:

- дифференциальное исчисление;
- вариационное исчисление;
- комбинаторные методы;
- теории расписаний и игр;
- теории массового обслуживания и управления запасами;
- методы экспертных оценок;
- симплексный метод и др.

Методы математического анализа обычно используются при расчётах календарно-плановых нормативов, определении размеров партий продукции и т.п. Прикладная математика включает группу следующих методов:

- оптимального программирования;
- математической статистики.

Оптимальное программирование – это комплекс специальных методов, обеспечивающих в условиях множества возможных решений выбор такого решения, которое является наилучшим относительно некоторого критерия с учётом существующих ограничений. Решение задач оптимального программирования осуществляется следующими основными методами:

- линейного программирования;
- стохастического программирования;
- целочисленного (дискретного) программирования;
- нелинейного программирования;
- выпуклого программирования;
- квадратичного программирования;
- динамического программирования.

Линейное программирование используется в том случае, когда целевая функция и ограничительные условия выражены линейными уравнениями. Решение задачи состоит в определении значений переменных, обеспечивающих максимум или минимум целевой функции.

Целочисленным программированием называется линейное программирование, когда аргументы могут принимать только целочисленные значения.

Стохастическое программирование использует аппарат линейного программирования при случайном характере аргументов.

Методы нелинейного программирования используются тогда, когда зависимости между переменными в целевой функции и (или) ограничениях носят нелинейный характер. Задачи нелинейного программирования достаточно сложны и не имеют универсального метода решения.

Выпуклое программирование включает совокупность специальных методов решения нелинейных экстремальных задач, в которых выпуклы либо целевые функции, либо ограничительные условия.

Квадратичное программирование – это совокупность методов решения особого класса экстремальных задач, в которых ограничительные условия линейны, а целевая функция является многочленом второй степени. Методы нелинейного программирования используются при решении задач расчёта роста производительности труда, изменения издержек производства и т.д.

Метод динамического программирования позволяет записать оптимальное решение в самом общем виде. При этом процесс моделируется в противоположном направлении движению времени: «из будущего в настоящее». Теоретической основой этого метода является принцип оптимальности Беллмана-Понтрягина, который гласит: «всякая оставшаяся часть оптимального процесса – оптимальна». Процесс моделирования протекает в обратном отсчёте времени: от конечного состояния к текущему состоянию, а вся траектория движения во времени разбивается на ряд отрезков. На первом этапе определяется оптимальное решение для последнего (ближайшего к конечному состоянию) отрезка траектории. Затем определяется оптимальное решение на сумме последнего и предпоследнего отрезков траектории и т.д. Данным методом могут решаться задачи замены оборудования с назначением целевой функции – прибыль от эксплуатации, распределения различных видов ресурсов по производствам и т.д.

1.3. Непрерывные линейные модели в пространстве состояний

Задача на загрузку производственных мощностей предприятия

Предположим, что производственные мощности для изготовления n различных видов продукции установлены в n цехах. Пусть b_i представляет суммарную мощность i-го цеха и a_{ij} – производственная мощность i-го цеха, которая необходима для производства единицы продукции вида j. Тогда, обозначая через x_j количество выпущенной продукции, получим уравнения, которые отражают степень использования имеющихся производственных мощностей (недогрузку или перегрузку):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

В векторно-матричной форме данная система алгебраических уравнений записывается следующим образом:

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

Следовательно, матрица A означает матрицу потребностей в мощностях, где x - вектор выпуска продукции; b – вектор имеющихся мощностей. Решением данного уравнения относительно x является

$$x = A^{-1}b. \tag{1.3}$$

Здесь используется обратная матрица по отношению к матрице A. В результате получим объёмы продукции, которые удовлетворяют исходным соотношениям.

Математическая модель фон Неймана

Рассмотрим простую модель экономической системы, в которой взаимодействуют три элемента: промышленная продукция, например металлопрокат S, продукты питания P и трудовые ресурсы L (сочетание этих элементов характерно для промышленно развитых экономических систем). На производство каждого элемента затрачивается часть того, что было произведено, например, годом ранее (в терминах принятых обозначений на начало года – S_0, P_0, L_0). Возникает вопрос: может ли экономическая система развиваться и с какой скоростью будет происходить рост её составляющих элементов? Пусть производство новой (в следующем году) единицы металлопроката требует 0.4 единицы производимого металлопроката и 0.5 единицы трудовых ресурсов, производство единицы продуктов питания требует 0.1 единицы продуктов питания и 0.7 единицы трудовых ресурсов, производство (или содержание) единицы трудовых ресурсов требует 0.8 единиц продуктов питания, 0.1 единиц металлопроката и 0.1 единиц трудовых ресурсов. Тогда входные данные, в качестве которых используются S_0, P_0, L_0, связаны с выходными (новыми) данными S_1, P_1, L_1 следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0{,}4S_1 + 0P_1 + 0.5L_1, \\ P_0 &= 0S_1 + 0.1P_1 + 0.7L_1, \\ L_0 &= 0.1S_1 + 0.8P_1 + 0.1L_1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

С учётом соответствующих обозначений данное уравнение в векторно-матричной форме запишется следующим образом:

$$U_0 = AU_1, \tag{1.5}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} S_0 \\ P_0 \\ L_0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} U_1 = \begin{bmatrix} S_1 \\ P_1 \\ L_1 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Отметим, что это разностное уравнение в «обратную сторону» (значение индекса переменных справа больше, чем значение индекса слева), т.е. вместо привычного соотношения $U_1 = AU_0$ имеем $U_0 = AU_1$. Следовательно, процессы в экономической системе будут определяться не компонентами (собственными значениями) матрицы A, а матрицы A^{-1}. В этой задаче имеется ещё одна особенность: значения переменных (количество металлопроката, продуктов питания и трудовых ресурсов) не могут быть отрицательными.

Для определения максимальной скорости α, с которой экономическая система может развиваться, необходимо выполнение условий:

$$U_1 \geq \alpha U_0 \geq 0. \tag{1.7}$$

Если эти неравенства выполняются (например, начиная с некоторых значений U_0, будем через некоторое время завершать процесс производства значениями αU_0), то, начиная следующий год с U_1, получим по крайней мере αU_1 или $\alpha^2 U_0$.Следовательно, экономическая система будет развиваться со скоростью α. Разумеется, если возможное наибольшее значение α будет меньше 1, то система будет фактически не развиваться, а деградировать. В случае, когда A - «марковская» матрица, будем иметь равновесие, при котором $\alpha = 1$.

Межотраслевой баланс производства и выпуска продукции (математическая модель «затраты-выпуск» Леонтьева)

Межотраслевой баланс разработан известным экономистом Леонтьевым как средство анализа взаимозависимости различных секторов экономики. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n секторов; в каждом секторе производится один вид товаров. Пусть x_i – валовой выпуск i-го товара; a_{ij} – количество i-ой продукции, используемой при производстве j-ой продукции; y_i – конечный спрос на i-ю продукцию. Валовой выпуск каждого вида продукции должен быть равен сумме продукции, использованной при производстве всех видов продукции, плюс конечный спрос на эту же продукцию. Данные рассуждения можно записать в математической форме:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + y_i \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots \ldots n. \tag{1.8}$$

В векторно-матричном виде это уравнение записывается как

$$x = Ax + y. \tag{1.9}$$

Квадратная матрица A называется *матрицей прямых затрат*. Все её элементы по определению (согласно исходным условиям) неотрицательны (положительны или равны нулю). Также неотрицательными будут элементы x, если элементы y – неотрицательны. Предположим, что в течение некоторого времени коэффициенты a_{ij} остаются постоянными. Тогда, решая последнее уравнение относительно вектора x, можно определить валовой выпуск всех секторов экономики, необходимый для обеспечения любого уровня конечного спроса y. Запишем это уравнение в виде

$$(I - A)x = y. \tag{1.10}$$

Полагая, что существует обратная матрица $(I - A)^{-1}$ (определитель матрицы $(I - A)$ не равен нулю), получим решение относительно x:

$$x = (1 - A)^{-1} y. \tag{1.11}$$

В отличие от экономиста фон Неймана Леонтьев рассматривал, прежде всего, производство и потребление в течение ограниченного промежутка времени, и его система «затраты-выпуск» явилась одним из первых крупных успехов в математической экономике. Для её иллюстрации можно рассмотреть матрицу A потребления из модели расширяющейся экономики фон Неймана. Выясним следующее: можно ли получить вектор y с заданными значениями промышленной продукции y_1, продукции питания y_2, трудовых ресурсов y_3? Чтобы решить такую задачу, необходимо в первую очередь произвести такое количество соответствующей продукции (металлопроката x_1, продуктов питания x_2, трудовых ресурсов x_3), которой было бы достаточно для использования в производстве (часть продукции поглощается в самом процессе производства) и достижения требуемых заданных показателей y_1, y_2, y_3. Фактически потребленное количество продукции соответствует Ax, а чистая продукция равна $(x - Ax)$. В математической формулировке данная задача записывается следующим образом:

Определить такой вектор состояния x, при котором выполняется равенство

$$x - Ax = y, \text{ или } x = (I - A)^{-1} y. \tag{1.12}$$

На первый взгляд нам необходимо выполнить требование: существует ли обратная матрица $(I - A)$? Однако в этой задаче имеется особенность, связанная с неотрицательностью: мы предполагаем, что вектор y заказов и вектор x продукции неотрицательны, т.е. $y \geq 0$, $x \geq 0$. Поэтому вопрос заключается в том, будут ли элементы матрицы $(I - A)^{-1}$ неотрицательными. Если это условие будет выполняться, то произведение $(I - A)^{-1} y$ будет также неотрицательным. Таким образом, при заданной матрице потребления A с наибольшим собственным значением λ_1 основной математический результат формулируется следующим образом: *матрица* $(I - A)^{-1}$

неотрицательна тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 1$. В этом случае экономическая система может производить продукцию в любом сочетании: при таких собственных значениях ($\lambda_1 < 1$) производство всегда превосходит потребление.

Пример модели Леонтьева

Пусть на производство единицы металлопроката затрачивается две единицы продуктов питания, и наоборот – на производство единицы продуктов питания затрачивается две единицы металлопроката. Матрица A будет равна

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Собственные значения данной матрицы вычисляется из уравнения

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4 = 0. \tag{1.14}$$

Наибольшее собственное значение будет равно $\lambda_1 = 2$. Вследствие того, что определитель матрицы $(I - A)$ равен (-3), обратная матрица будет равна

$$(I - A)^{-1} = -0.33 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Заключение: в такой экономической системе ничего нельзя произвести, так как значения вектора продукции будут отрицательными. При этом можно и не вычислять матрицу $(I - A)^{-1}$, а сделать такое заключение в результате того, что не выполняется условие $\lambda_1 < 1$.

Основная цель, которую решал Леонтьев, состояла в том, чтобы найти модель, использующую данные реальной экономики. Официальная американская статистика в 1958 г. содержала в матричной таблице межотраслевых связей данные по 83 отраслям производства. Построенная экономическая теория Леонтьева выходит за рамки простого исследования матрицы $(I - A)^{-1}$ и позволяет решать вопросы о естественных ценах рынка и об оптимизации. Трудовые ресурсы при этом рассматриваются отдельно как наиболее важный товар, количество которого ограничено и должно быть минимизировано.

Кроме того, процессы в экономических системах не всегда являются линейными.

Модель управления запасами

Модель управления запасами можно описать дифференциальным уравнением

$$x(t) = u(t) - f(t), \tag{1.16}$$

где $x(t)$ – объём запасов в момент времени t; $u(t)$ - выпуск продукции в единицу времени; $f(t)$ - скорость поставок продукции потребителю, которая предполагается положительной. Данное уравнение отражает следующее: скорость изменения объема запасов является функцией текущего момента времени и текущего состояния. Склад для хранения запасов можно представить в виде резервуара, объём содержимого которого увеличивается или уменьшается в зависимости от соотношения вливающихся в него или вытекающих из него потоков продукции:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (u(t) - f(t))\, dt\,, \tag{1.17}$$

где x_0 – начальный объём запасов (в начальный момент времени $t = 0$); $x_0 = x(t = 0)$. Смысл оператора интегрирования заключается в интегрировании или суммировании разности скоростей потоков по интервалу времени от 0 до t, символ dt – оператор дифференцирования, представляющий малые интервалы времени, на которые умножаются разности скоростей потоков. Исходное дифференциальное уравнение можно записать в приближенной дискретной форме (разностным уравнением):

$$x(k + \Delta t) = x(k) + \Delta t(u(k) - t(k)), \tag{1.18}$$

где $u(k)$ и $f(k)$ – постоянные на интервале $(k, k+1)$ значения скоростей соответственно выпуска и поставок продукции. Погрешность приближения зависит главным образом от периода выборки Δt (Δt - период выборки определяет только вычислительный процесс).

Модель производства и управления запасами

Уравнения состояния можно записать следующими уравнениями:

$$x_1(t) = \alpha\,(u(t) - x_1(t)), \tag{1.19}$$

$$x_2(t) = x_1(t) - f(t),$$

где $x_1(t)$ – фактическая интенсивность производства (фактический выпуск продукции в единицу времени); $u(t)$ – заданный (желаемый) уровень интенсивности (заданный выпуск продукции в единицу времени); $x_2(t)$– фактический объём запасов в единицу времени; $f(t)$ – скорость поставок продукции потребителю; α – положительный параметр, значение которого равно $\alpha = 1/\tau$; τ – временная задержка. Прежде чем представлять систему уравнений в векторно-матричной форме, следует записать переменные в уравнениях в порядке возрастания их индексов:

$$x_1(t) = -\alpha\, x_1(t) + 0x_2(t) + \alpha\, u(t) + 0\, f(t), \qquad (1.20)$$
$$x_2(t) = x_1(t) + 0x_2(t) + 0u(t) + (-1) f(t).$$

В векторно-матричной форме данные уравнения записываются следующим образом: $x(t) = Ax(t) + bu(t) + cf(t)$, (1.21)

где матрица A, векторы b и c соответственно равны:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (1.22)$$

Из данного уравнения видно, что параметры матрицы A определяют скорость изменения состояния при нулевом значении заданного уровня $u(t)$ – входного воздействия. Динамические характеристики экономической системы, описываемой этим уравнением состояния, определяются собственными значениями матрицы A.

Модель производства и управления запасами с учётом влияния рекламы на спрос

Данную модель можно представить в пространстве следующих переменных: $x_1(t)$ – фактической скоростью выпуска продукции; $x_2(t)$ – фактическим объемом (уровнем) запасов; $x_3(t)$ – фактической скоростью поставок; $u_1(t)$ – требуемой скоростью выпуска продукции; $u_2(t)$ – фактическими расходами на рекламу (скоростью изменения расходов).

Система скалярных уравнений записывается в следующем виде

$$x_1(t) = \alpha\, (u_1(t) - x_1(t)),$$
$$x_2(t) = x_1(t) - x_3(t), \qquad (1.23)$$
$$x_3(t) = \beta\, (u_2(t) - x_3(t)),$$

где α, β – положительные числа. В первом уравнении подразумевается, что фактическая скорость выпуска «отслеживает» требуемую скорость выпуска с временной задержкой, равной $1/\alpha$. В третьем уравнении фактическая скорость поставок «отслеживает» фактические расходы на рекламу с временной задержкой, равной $1/\beta$. Систему данных уравнений можно записать в векторно-матричной форме

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.24}$$

где матрицы A и B соответствующей размерности равны

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}. \tag{1.25}$$

Математическая модель рекламной деятельности фирмы

Математическая модель деятельности фирмы должна дать уверенность в том, что её продукция будет реализована на рынке и прибыль от будущих продаж будет компенсировать затраты на рекламную кампанию. На первом этапе осуществляется анализ рынка. На втором этапе фирма выпускает и рекламирует продукцию. Первоначальные расходы на рекламу могут превышать доходы, поскольку лишь малая часть потенциальных потребителей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возможно, рассчитывать на увеличении прибыли. При насыщении рынка проводить рекламную кампанию невыгодно, так как это не будет приносить ощутимой прибыли.

Принимаются следующие обозначения:

$N(t)$ – число информированных потребителей;

$N_П(t)$ – общее число потенциально платежеспособных покупателей;

$dN(t)/dt$ – скорость изменения количества потребителей, узнавших о продукции и готовых её приобрести;

t – время, прошедшее с начала рекламной кампании.

Предполагаем, что скорость изменения количества потребителей пропорциональна количеству потребителей, не информированных (не знающих) о продукции фирмы:

$$\beta_1(t)[N_П(t) - N(t)], \tag{1.26}$$

где $\beta_1(t)$– положительное число, характеризующее интенсивность рекламной кампании. Значение этой интенсивности фактически определяется затратами на рекламу в данный момент времени.

Также предполагаем, что информированные о продукции потребители распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая в качестве «свободных» рекламных агентов фирмы, работающих на безвозмездной основе. Вклад этих рекламных агентов в скорость изменения количества потребителей тем больше, чем больше количество «свободных» рекламных агентов и может быть представлено уравнением

$$\beta_2(t)N(t)[N_П(tt)-N(t)], \tag{1.27}$$

где β_2 – положительное число, характеризующее степень общения потребителей между собой. Значение этой степени общения может быть установлено, например, с помощью опросов.

В итоге получаем уравнение

$$\begin{aligned} dN(t)/dt &= \beta_1(t)[N_П(t)-N(t)]+\beta_2(t)N(t)\times \\ &\times[N_П(t)-N(t)]=[\beta_1(t)+\beta_2(t)N(t)][N_П(t)-N(t)]. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Анализ этого уравнения позволяет заключить, что при определённых соотношениях значений $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ рекламную кампанию фирмы можно представить тремя моделями.

Первая модель – это модель типа модели Мальтуса, когда выполняется соотношение

$$\beta_1(t) >> \beta_2 N(t). \tag{1.29}$$

Этот случай характерен для фирмы, которая производит продукцию совершенно неизвестную потребителю или проводится оценка рекламной деятельности фирмы на относительно малом начальном интервале времени реализации продукции. Исходное уравнение (1.28) принимает вид

$$dN(t)/dt = \beta_1(t)[N_П(t)-N(t)]. \tag{1.30}$$

Интегрирование данного уравнения позволяет получить значение численности $N(t)$ с учётом информации о начальном значении N_0 в момент времени t_0.

Вторая модель – это модель, записанная в виде уравнения, позволяющего построить определённую характеристику (при любом начальном значении N_0 функция $N(t)$стремится к некоторому значению, характеризующему равновесное состояние). Данная модель обусловлена выполнением соотношения

$$\beta_2(t)N(t) >> \beta_1(t). \tag{1.31}$$

Исходное уравнение (1.28) принимает вид

$$dN(t)/dt = \beta_2(t)N(t)[N_П(t) - N(t)]. \tag{1.32}$$

Обозначая $d\tau = \beta_2(t)dt$, данное уравнение записывается следующим образом:

$$dN(t)/d\tau = N(t)[N_П(t) - N(t)]. \tag{1.33}$$

Это уравнение отражает идею «насыщения» для данного процесса: скорость роста со временем величины $N(t)$ пропорциональна произведению текущего значения этой величины на разность $[N_П(t) - N(t)]$ между её предельным и текущим значениями.

Третья модель характеризует рекламную деятельность фирмы при определенных условиях, если в какой-то момент времени величина $[\beta_1(t) + \beta_2(t)N(t)]$ в (1.28) принимает нулевое или даже отрицательное значение. Для этого необходимо, чтобы один или оба коэффициента $\beta_1(t), \beta_2(t)$ в этот момент времени были отрицательными. Подобный негативный эффект характерен для неудачной рекламной кампании на этом интервале её проведения и является сигналом фирме, который должен побудить руководство изменить характер рекламы или отказаться от дальнейшей пропаганды продукции. Мероприятия по увеличению популярности продукции могут, в зависимости от значений величин $\beta_1(t), \beta_2(t), N(t)$, направляться на улучшение результатов как прямой (параметр $\beta_1(t)$), так и косвенной (параметр $\beta_2(t)$) рекламы.

На начальном этапе рекламной кампании можно предположить три возможных варианта, отражающие информированность потребителей о продукции фирмы:

Первый вариант. Предполагается, что у потребителей нет информации о продукции фирмы. Это возможно в случаях, когда фирма начинает выпуск принципиально новой продукции, свойства которой неизвестны покупателю, или фирма реализует продукцию на рынке без соответствующей рекламной поддержки. Для данного варианта можно записать

$$\beta_1(t) >> \beta_2(t)N(t) \qquad (1.34)$$

$$N_П(t) >> N(t)$$

На момент начала рекламной кампании при $t = t_0$

$$\beta_1(t_0) >> \beta_2(t_0)N(t_0), \qquad (1.35)$$

$$N_П(t_0) >> N(t_0).$$

Полагая $N(t_0) = 0$ и $N_П(t_0) = N_П = \text{const}$, уравнение (1.30) записывается в виде

$$dN(t)/dt = \beta_1(t)N_П(t). \qquad (1.36)$$

В результате имеем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$N(t) = N_П \int_{t_0}^{t} \beta_1(t)dt. \qquad (1.37)$$

Данное уравнение позволяет установить достаточно простые соотношения для определения издержек на рекламу и прибылью от реализации продукции в самом начале рекламной кампании. Обозначим символом p величину прибыли без затрат на рекламную кампанию при единичной продаже продукции.

Второй вариант. Полагаем, что каждый покупатель приобретает только одну единицу продукции. Коэффициент $\beta_1(t)$ означает количество равнозначных рекламных действий в единицу времени (например расклейка одинаковых афиш).

Обозначим через s стоимость этого рекламного действия. Тогда суммарная прибыль будет равна

$$P(t) = pN(t) = pN_П \int_{t_0}^{t} \beta_1(t)dt. \qquad (1.38)$$

Произведённые затраты на рекламу будут равны

$$S(t) = s \int_{t_0}^{t} \beta_1(t)dt. \qquad (1.39)$$

Анализ данных уравнений показывает, что полученная прибыль будет превосходить издержки на рекламную кампанию при условии $p\,N_{П} > s$.

Третий вариант. При достаточно большом спросе на продукцию (т.е. рынок обладает большой ёмкостью) и действенной и недорогой рекламе фирма может получить значительный доход с первых же моментов рекламы. В действительности между оплатой рекламы, рекламным действием и последующей поставкой продукции имеется временная задержка, которую необходимо учитывать в более полных моделях рекламной деятельности фирмы. При достаточно дорогой или не эффективной рекламной кампании (но при наличии определённых темпов сбыта продукции) фирма будет очевидно нести определённые убытки. Однако это обстоятельство не может служить основанием для прекращения рекламной деятельности. Действительно, выражение (1.38) и условие $p\,N_{П} > s$ справедливо при малых значениях $N(t)$ и тогда, когда функции $P(t)$ и $S(t)$ изменяются по одинаковым законам. При увеличении $N(t)$ отброшенными составляющими в (1.28) пренебречь нельзя и соответственно усиливается действие косвенной рекламы. Функция $N(t)$ может стать более «быстрой» функцией времени, чем в уравнении (1.38). Этот нелинейный эффект в изменении величины $N(t)$ при неизменном темпе роста издержек даст возможность скомпенсировать финансовую неудачу начальной стадии рекламной кампании. Данное утверждение поясним на примере рассмотрения уравнения (1.28) с постоянными коэффициентами β_1, β_2 на некотором интервале времени. Уравнение (1.28) с учётом $N_{П}(t) = N_{П}$ будет записано в следующем виде:

$$dN(t)/dt = [\beta_1 + \beta_2 N(t)][N_{П} - N(t)]. \qquad (1.40)$$

Введём дополнительные переменные

$$N^*(t) = \beta_1/\beta_2 + N(t), \qquad (1.41)$$

$$N_{П}^* = \beta_1/\beta_2 + N_{П}.$$

После подстановки (1.41) в (1.40) запишем

$$dN^*(t)/dt = \beta_2 N^*(t)\left[N_{П}^* - N^*(t)\right]. \qquad (1.42)$$

Решение данного уравнения будет иметь вид

$$N^*(t) = \left[1 + \left(N_{П}^*\beta_2/\beta_1 - 1\right)\exp\left(-N_{П}^*\beta_2 t\right)\right]^{-1}. \qquad (1.43)$$

Для начального условия $N(t_0 = 0)$ значение

$$N_{\Pi}^{*}(t_0) = \beta_1/\beta_2. \qquad (1.44)$$

Из (1.42) следует, что производная функции $N^{*}(t)$ и, следовательно, функции $N(t)$ при $t > t_0$ может быть больше её начального значения (при условии $N_{\Pi}^{*} > 2\beta_1/\beta_2$ или $N_{\Pi} > \beta_1/\beta_2$).

Максимум производной достигается при $N^{*}(t) = N_{\Pi}^{*}/2$ или при $N(t) = (\beta_1/\beta_2 + N_{\Pi})/2$:

$$\{dN^{*}(t)/dt\}_{\max} = \{dN(t)/dt\}_{\max} = \beta_2 N_{\Pi}^{*}/4 = \beta_2(\beta_1/\beta_2 + N_{\Pi})^2/4. \qquad (1.45)$$

В этот период максимальную текущую прибыль, получаемую в единицу времени, можно вычислить по уравнению

$$P_{\max} = p\{dN(t)/dt\}_{\max} = p\beta_2(\beta_1/\beta_2 + N_{\Pi})^2/4. \qquad (1.46)$$

Начальная текущая прибыль, получаемая от рекламной кампании, вычисляется при $t = t_0$:

$$P_H = p\{dN(t)/dt\}_{t0} = p\beta_1 N_{\Pi}. \qquad (1.47)$$

Вычитая из $P_{\max}$ значение P_H, получаем разницу ΔP между начальной и максимальной текущей прибылью

$$\Delta P = p\left(\beta_1/\sqrt{\beta_2} - \sqrt{\beta_2}N_{\Pi}\right)^2/4. \qquad (1.48)$$

Данная разница может быть весьма значительной, и суммарный экономический эффект от рекламной кампании будет определяться в процессе её проведения. Для рассматриваемого случая характеристики рекламной кампании вычисляются по уравнениям (1.42) и (1.43). Необходимым условием экономического эффекта является выполнение неравенства

$$P_{\max} = p\beta_2(\beta_1/\beta_2 + N_{\Pi})^2/4 > \beta_{1s}. \qquad (1.49)$$

Как следует из (1.42), начиная с некоторого момента, продолжать рекламу становится невыгодно. Так, при значениях $N^{*}(t)$, близких к значению N_{Π}^{*}, уравнение (1.42) принимает вид

$$dN^*(t)/dt = \beta_2 N^*_П \left[N^*_П - N^*(t)\right]. \qquad (1.50)$$

Решение этого уравнения при $t \to \infty$ стремится к предельному значению $N^*_П$, а функция $N(t)$ – к $N_П$ по экспоненциальному закону с большой постоянной времени. Это характеризует, что в единицу времени появляется малое число новых потребителей, и поступающая прибыль при любых условиях не может покрыть продолжающихся издержек.

Модель изменения зарплаты и занятости.

Рассмотрим рынок труда, на котором взаимодействуют работодатели и наемные работники. Имеется определённое число занятых работников $N(t)$, получающих за свой труд заработную плату $z(t)$. Предположим, что на рынке труда существует равновесие, когда за плату $z_P > 0$ согласно работать $N_P > 0$ работников. Очевидно, что могут возникать ситуации, когда это равновесие может нарушаться. Причинами нарушения могут быть, например, миграция работников пенсионного возраста или финансовые трудности работодателей, обусловливающие сокращение трудоспособных работников. Будем считать, что работодатели изменяют зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного состояния. При данных предположениях изменения зарплаты можно описать уравнением

$$d\,z(t)/dt = -\alpha_1 (N(t) - N_P), \qquad (1.51)$$

$$\alpha_1 > 0.$$

Предположим также, что число работников изменяется пропорционально росту или уменьшению зарплаты относительно значения z_P. Изменения зарплаты можно представить следующим уравнением

$$dN(t)/dt = -\alpha_2 (z(t) - z_P), \qquad (1.52)$$

$$\alpha_2 > 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по t и исключая из него с помощью второго уравнения величину $N(t)$, получаем уравнение второго порядка, характеризующее заработную плату относительно положения равновесия

$$d^2\left(z(t)-z_P\right)/\,dt^2=-\alpha_1\alpha_2\left(z(t)-z_P\right). \qquad (1.53)$$

Аналогичное уравнение можно получить для изменения численности занятых работников относительно равновесного состояния

$$d^2\left(N(t)-N_P\right)/\,dt^2=-\alpha_1\alpha_2\left(N(t)-N_P\right), \qquad (1.54)$$

интегрируя первое уравнение (1.28), запишем

$$\alpha_1\left(N(t)-N_P\right)^2+\alpha_2\left(z(t)-z_P\right)^2=\text{const}>0\,. \qquad (1.55)$$

Из данного уравнения можно заключить, что в некоторые моменты времени $t=t_i$, $i=1,2,\ldots$, когда $z(t)=z_P$, т.е. зарплата становится равной равновесному значению), имеем $N(t)>N_P$ и число занятых работников становится больше равновесного значения. При $N(t)=N_P$ получаем, что $z(t)>z_P$ и зарплата превышает равновесную величину. В эти моменты времени фонд зарплаты, равный $V(t)=z(t)N(t)$ превышает равновесное значение $V_P=z_PN_P$ (или меньше его), если при подходе к моменту t_i выполнено неравенство $z(t)>z_P$ или $N(t)>N_P$ (и наоборот). Но в среднем за период величина $z(t)\,N(t)$ равна фонду z_PN_P зарплаты при равновесном состоянии.

1.4. Общее описание процессов в экономических системах дискретными линейными моделями

Рассмотрим скалярное разностное уравнение, описывающее систему с временным запаздыванием между принятием решения об изменении уровня запасов и фактическим изменением этого уровня:
$$y_k+a_1y_{k-1}\ldots\ldots+a_ny_{k-1}=u_k\,. \qquad (1.56)$$

Данное разностное уравнение можно записать с использованием дискретного оператора сдвига:

$$\left(1+a_1z^{-1}+\ldots\ldots+a_nz^{-n}\right)y_k=u_k, \qquad (1.57)$$

где z^{-1} – оператор сдвига, посредством которого каждой функции y ставится в соответствие та же функция со сдвинутым аргументом

$$\left(z^{-i}y\right)\text{, т.е. }\left(z^iy_k\right)=y_{k-i}\,. \qquad (1.58)$$

Единичная задержка определяется оператором z^{-1}.

Пример

Рассмотрим дискретную систему с обратной связью. Допустим, имеем сумматор, который суммирует две дискретные переменные u_k и x_k, где u_k – управляющая переменная (входное воздействие); x_k - переменная с выхода звена обратной связи (измеряемая, или информационная, переменная). Структурную схему такой системы можно представить в виде:

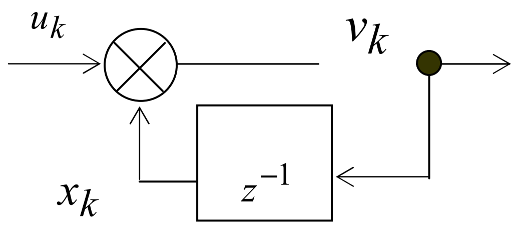

Рис. 1.1. Структурная схема дискретной системы с обратной связью

Следовательно, на выходе сумматора формируется переменная v_k. Уравнение сумматора в любой момент времени k имеет вид

$$u_k + x_k = v_k. \tag{1.59}$$

Обратная связь организуется путем использования информации о переменной v_{k-1} на предыдущем такте времени $(k-1)$. Уравнение обратной связи представляет равенство

$$x_k = v_{k-1}. \tag{1.60}$$

Таким образом, звеном обратной связи является звено задержки на один такт времени. Тогда предыдущее уравнение для текущего интервала времени k можно записать как

$$x_k = \left(z^{-1}v_k\right). \tag{1.61}$$

Для будущего интервала времени информация о выходной переменной v_k сумматора может быть вычислена по уравнению

$$x_{k+1} = \left(z^{-1}v_{k+1}\right) = \left(z^{-1}u_{k+1}\right) + \left(z^{-1}x_{k+1}\right) = u_k + x_k. \tag{1.62}$$

Данное выражение точно соответствует дискретной модели управления запасами.

Рассмотрим другой вариант преобразования скалярного разностного уравнения, который позволяет получить дискретное векторно-матричное уравнение.

Для исходного уравнения используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &x_{1k} = y_{k-n}, \\ &x_{2k} = y_{k-n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ &x_{nk} = y_{k-1}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Систему данных уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} &x_{1\ k+1} = x_{2\ k}, \\ &x_{2\ k+1} = x_{3\ k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1\ k+1} = x_{nk}, \\ &x_{nk} = u_k - a_n x_{1k}, \\ &-\ \ldots\ldots\ldots\ -\ a_1 x_{nk}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Тогда в векторно-матричной форме запишем

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.65)$$

где соответствующие матрицы равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.66)$$

Таким образом, полученное векторно-матричное уравнение – это одна из форм записи исходного скалярного разностного уравнения.

В общем случае динамику запасов в дискретных системах можно представить дискретным уравнением первого порядка в векторно-матричной форме

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Et_k, \quad (1.67)$$

где A, B, E – соответственно матрицы запасов, производства, поставок. Элементы матриц определяются при постановке задачи.

1.5. Общее решение дискретных матричных уравнений

Формально решить разностное уравнение $u_{k+1} = Au_k$ достаточно просто. Поскольку каждый дискретный шаг даёт умножение на матрицу A, решение u_k этого уравнения связано с начальным значение u_0 соотношением

$$u_k = A^k u_0. \tag{1.68}$$

Главная трудность состоит в отыскании быстрого способа вычисления степеней A^k. Ключом к этому являются собственные числа и собственные векторы матрицы A.

Если матрица A приводится к диагональному виду $A = S\Lambda S^{-1}$, то можно записать

$$u_k = A^k u_0 = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\ldots\ldots\left(S\Lambda S^{-1}\right) = \left(S\Lambda^k S^{-1}\right)u_0 \tag{1.69}$$

(в процессе умножения k раз произведения $S^{-1}S = I$, и остаётся лишь первая и последняя матрицы). Столбцы матрицы S – это есть собственные векторы x_i (i изменяется от 1 до n) матрицы A, и перемножение матриц позволяет записать

$$u_k = \left[x_1 \ldots\ldots\ldots x_n\right]\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \lambda_2^k & & & \\ & & \ldots. & & \\ & & & \lambda_{n-1}^k & \\ & & & & \lambda_n^k \end{bmatrix};$$

$$S^{-1}u_0 = c_1\lambda^{k1}x_1 + c_2\lambda^{k2}x_2 + \ldots + c_n\lambda^{kn}x_n. \tag{1.70}$$

Общее решение есть комбинация частных решений $\lambda_i^k x_i$, и коэффициенты c_i, соответствующие начальному условию u_0, равны:

$$c_1\lambda_1^0 x_1 + c_2\lambda_2^0 x_2 + \ldots + c_n\lambda_n^0 x_n = u_0, \tag{1.71}$$

$$\text{или } Sc = u_0, \text{ или } c = S^{-1}u_0. \tag{1.72}$$

Данные формулы дают два различных подхода к одному и тому же решению

$$u_k = \left(S\Lambda^k S^{-1}\right)u_0. \tag{1.73}$$

Первый подход позволяет заключить, что матрица A^k совпадает с матрицей $\left(S\Lambda S^{-1}\right)$. Второй же подход яснее показывает аналогию с решением дифференциального уравнения: вместо экспоненциальных решений $\left(\exp\lambda_i t\right)x_i$ имеем теперь степени $\lambda_i^k x_i$. Гармоническими составляющими являются собственные векторы x_i, и на каждом шаге они усиливаются благодаря собственным значениям λ_i. Комбинируя эти частные решения так, чтобы получить вектор u_0, получаем истинное решение

$$u_k = \left(S\Lambda^k S^{-1}\right)u_0. \tag{1.74}$$

1.6. Дискретные линейные модели экономических систем в пространстве состояний

Дискретная линейная модель изменения запасов

В некоторых случаях дискретные процессы изменения запасов в производственно-экономических системах могут быть представлены детерминированной моделью вида

$$x_{k+1} = x_k + u_k - f_k, \tag{1.75}$$

где, x_k - количество запасов, имеющихся в начале интервала k; u_k - объём производства продукции (управляющее входное воздействие) в течение интервала k; f_k - спрос (возмущающее воздействие) в течение интервала k. Для решения данного уравнения необходимо знать состояние x_0 и переменные u_0, f_0 в начальный момент времени. Для получения же траектории x_k движения системы обычно задаётся последовательность $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-1}$ объёмов производства при известной последовательности возмущений $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_{n-1}$.

Варианты стохастической модели изменения запасов

Вариант 1

Нередко в системе производства и управления запасами имеется задержка между временем принятия решения об изменении уровня производства продукции и временем, когда это изменение происходит фактически. В таких случаях переменные с запаздыванием могут рассматриваться как случайные. Тогда разностное уравнение, описывающее динамику производственно-экономической системы, имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + u(k,h) - f_k. \tag{1.76}$$

Величина $u(k, h)$ представляет собой зависимость текущего значения переменной управления в момент времени k и предыдущие h моменты времени. Каждое из управляющих воздействий $u(k, h)$ поступает в систему со случайным запаздыванием:

$$u(k,h)=\sum_{m=0}^{h}\varepsilon_m(k)u(k-m), \tag{1.77}$$

где $\varepsilon_m(k)$ – случайные величины, принимающие значения 0 или 1 с известными вероятностями; $m=0, 1, \ldots\ldots, h.$ Предполагается, что в выражении $u(k-m)$ любое управляющее воздействие может появиться только для одного значения k.

Вариант 2

Другой подход предполагает, что коэффициенты дискретной модели (например в векторно-матричной форме), являются случайными величинами:

$$x_{k+1}=A(k,h)x_k+B(k,h)u_k+C(k,h)f_k. \tag{1.78}$$

Первый и второй варианты предполагают, что точно известны вероятностные распределения, которые можно проверить по прошлым наблюдениям. Необходимость знания точных распределений значений случайных величин – весьма жёсткое ограничение. В реальных условиях это ограничение выполняется крайне редко.

Вариант 3

Точное описание любого реального процесса принципиально невозможно, и при неполной информации о параметрах целесообразно вводить допуски значений параметров в виде интервалов числовой оси. Использование экспертных оценок для определения параметров модели – простой и вполне удовлетворительный подход. Оценку параметров можно организовать таким образом, чтобы качественные представления об альтернативах выразить в количественной форме. Очевидно, всегда имеется некая информация о значениях параметров, не превышающих определённые границы. Однако точное значение параметра неизвестно. Не полностью определенные процессы исследуются на основе теории нечёткого множества. Использование нечётких множеств позволяет освободиться от определения вероятности. Вероятности обычно связаны со случайностью, игрой случая. Нечёткие множества определяются расплывчатостью, неопределённостью и субъективностью. Каждое индивидуальное субъективное суждение определяет отдельное нечёткое подмножество. Преимущества использования понятия нечёткого множества – его простота и общность. Нечёткая модель не сложнее детерминированной модели, но она позволяет решить не одну задачу, а целую группу задач. Например, модель производственно-экономического процесса может быть представлена в форме словесного описания. Руководители производства постоянно имеют дело с такими моделями. Несмотря на то, что это наименее точная модель, такая модель позволяет получить практический результат. Желаемое поведение записывается с использованием лингвистических правил типа:

Если «высокий удельный расход»,
то «низкая производительность».

Подобные выражения дают информацию о том, что должно произойти в системе при поступлении на её вход определённых управляющих воздействий. В данном случае – это нечёткие множества, определённые на универсальных множествах «производительность» и «расход».

Обобщенная дискретная модель производственной системы

Поведение производственной системы можно представить следующей моделью:

$$x_{1\,k+1} = x_{1\,k} + \alpha\left(x_{2\,k} - x_{1\,k}\right), \tag{1.79}$$

$$x_{2\,k+1} = x_{2\,k} + u_k,$$

где x_{1k} – объём произведенной продукции; x_{2k} – установленные производственные мощности; u_k – вводимые производственные мощности. Коэффициент α – положительное число.

Упрощенная дискретная модель динамики национального дохода

Полный национальный доход в k - м году обозначается через y_k и равен сумме потребления и инвестиций:

$$y_k = w_k + u_k. \tag{1.80}$$

Потребление зависит от прошлогоднего национального дохода следующим образом: $$w_k = by_{k-1}, \tag{1.81}$$

где коэффициент b называется предельной склонностью к потреблению. В результате можно записать

$$y_k = by_{k-1} + u_k = u_k + bu_{k-1} + b^2 y_{k-2}. \tag{1.82}$$

Записывая по первым двум формулам y_k и w_k при изменении k до некоторого начального (нулевого $k = 0$) значения, национальный доход в k-м году с учётом предыстории будет равен

$$y_k = by_{k-1} + u_k = u_k + bu_{k-1} + ... + b^k y_0 . \qquad (1.83)$$

1.7. Взаимосвязь дискретной и дифференциальной моделей процесса в экономической системе

Для точного численного решения дифференциального уравнения требуется бесконечное количество бесконечно малых шагов (итераций). В то же время решение разностных уравнений требует конечного числа конечных шагов. Рассмотрим модели начисления процентов в банке.

Допустим, мы размещаем в банке на процентном вкладе 1000 рублей и банк обязуется выплачивать нам 6% в год. Если проценты начисляются банком один раз в год, то исходная сумма умножается на коэффициент 1.06. Изменение денежной суммы можно представить разностным уравнением с шагом по времени в один год:

$$p_{k+1} = 1.06 P_k , \qquad (1.84)$$

где $k = 0, 1, ...,$

Это уравнение легко решается: например, за 5 лет исходный капитал $P_0 = 1000$ руб. умножается пять раз и можно записать

$$P_5 = (1.06)^5 \ P_0 = 1338 \text{ руб.} \qquad (1.85)$$

Предположим, что шаг по времени уменьшается до одного месяца. Разностное уравнение записывается в следующем виде:

$$P_{k+1} = P_k + 0.06 P_k / 12 = (1 + 0.06/12) P_k .$$

После 5 лет, или 60 месяцев, будем иметь

$$P_{60} = (1 + 0.06/12)^{60} P_0 = 1349 \text{ руб.} \qquad (1.86)$$

Рассмотрим ежедневное начисление процентов. Для этого случая разностное уравнение записывается следующим образом:

$$P_{1825} = (1 + 0.06/365)^{1825} P_0 = 1349.83 \text{ руб.} \qquad (1.87)$$

Наконец, чтобы привлечь больше вкладчиков, банк предлагает непрерывное начисление процентов. В этом случае прибыль в виде процентов добавляется в каждый момент времени и разностное уравнение нельзя использовать. Можно предположить, что банковский служащий не знает дифференциального исчисления и не может вычислить, какую сумму должен банк. У него имеется две возможности:

1. Вычислять итоговую сумму как можно чаще и заметить, что предел выражения:

$$P_{5N} = (1 + 0.06/N)^{5N}\, P_0 \to e^{0.3}1000 = 1349.87 \text{ руб.}, \qquad (1.88)$$

где выражение в скобках $(1 + 0.06/N) \approx e^{0.06/N}$ $(1 + 0.06/N) \approx e^{0.06/N}$ и, следовательно, $\left(e^{0.06/N}\right)^{5N} \approx e^{0.3}$ $\left(e^{0.06/N}\right)^{5N} \approx e^{0.3}$

2. Перейти к дифференциальному уравнению, являющемуся пределом разностного уравнения

$$P_{k+1} = (1 + 0.06\Delta t)P_k, \qquad (1.89)$$

где Δt – временной шаг (дискретность времени). Поскольку индекс k отражает изменение переменных с дискретностью в 1 год, то временной шаг имеет размерность в годах. После соответствующих преобразований данное уравнение можно записать как

$$(P_{k+1} - P_k)/\Delta t = 0.06\, P_k. \qquad (1.90)$$

При взятии предела (приближение дискретного временного шага к нулю) это уравнение сходится к дифференциальному уравнению (непрерывное время)

$$dP(t)/dt = 0.06\, P(t), \text{ или } dP(t) = 0.06\, P(t)dt. \qquad (1.91)$$

Решением данного уравнения является следующее:

$$P(t) = e^{0.06t} P_0, \qquad (1.92)$$

где t – непрерывное время в годах.

По истечении 5 лет суммарная величина капитала будет равна 1349.87 руб. Таким образом, можно установить, что ежедневное начисление процентов отличается от непрерывного начисления. В данном примере итоговая сумма за 5 лет при ежедневном начислении меньше суммы при непрерывном начислении на 4 коп. Этот пример содержит одновременно разностное и дифференциальное уравнения и показывает, каким образом одно уравнение переходит в другое, когда шаг по времени стремится к нулю.

1.8. Дискретные модели, которые не приводятся к дифференциальной форме

Пусть имеем числовую последовательность следующего вида: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\dots\dots$, в которой каждое из чисел равно сумме двух предыдущих. Математически это описывается разностным уравнением

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k. \tag{1.93}$$

Во многих экономических задачах необходимо вычислить, например, F_{1000}, не вычисляя промежуточные значения между значениями F_0 и F_{1000}. Первоначально данное уравнение приводится к «одношаговому уравнению» вида

$$u_{k+1} = Au_k., \tag{1.94}$$

где неизвестным является вектор u_k, равный

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}. \tag{1.95}$$

Причём начальным вектором u_0 является вектор

$$u_k = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}. \tag{1.96}$$

т.е. система уравнений вида

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \tag{1.97}$$

$$F_{k+1} = F_{k+1}$$

записывается векторно-матричным уравнением

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k. \tag{1.98}$$

Переход исходного уравнения к данному уравнению является стандартным приёмом для любого уравнения порядка s. $(s-1)$ тривиальных уравнений $F_{k+1} = F_{k+1}$ вида сочетаются с заданным уравнением для получения одношаговой системы.

Математические модели марковского процесса

Марковским процессом называется процесс, в котором история полностью игнорируется и каждая новая ситуация для $(k+1)$ шага зависит только от текущей ситуации в момент k, а данные от начального состояния до момента $(k-1)$ совершенно не используются.

Рассмотрим этот пример.

Пример марковского процесса

Предположим, что каждый год 1/10 людей, живущих вне г. Томска, въезжают в него, а $2/10$ томичей выезжают. Запишем математическую модель этого процесса. Обозначим: y_0, z_0 – количество людей, проживающих соответственно вне и внутри г. Томска на конец предыдущего года. В конце первого года имеем:

Людей вне г. Томска

$$y_1 = 9/10 y_0 + 2/10 z_0 = 0.9 y_0 + 0.2 z_0. \tag{1.99}$$

Людей внутри г. Томска

$$z_1 = 1/10 y_0 + 8/10 z_0 = 0.1 y_0 + 0.8 z_0 \tag{1.100}$$

В векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{1.101}$$

Основными свойствами марковского процесса в таком примере являются: общее число людей остается неизменным и значения элементов матриц (количество людей вне г. Томска и внутри г. Томска) всегда являются положительными. Первое свойство отражается в том, что сумма элементов столбца матрицы равна 1 (всё учитывается, нет ни лишних людей, ни потерянных); второе свойство – элементы матрицы и всех векторов положительны: если начальные значения векторов y_0, z_0 были неотрицательными, то все последующие будут также неотрицательными. Все матрицы A^k неотрицательны. Для решения дискретного уравнения (1) необходимо вычислить матрицу A^k. Используем процедуру диагонализации матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \quad [A - \lambda I] = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7, \tag{1.102}$$

где $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0.7$.

Тогда

$$A = S \Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.33 \\ 0.33 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{1.103}$$

Теперь можно определить матрицу A^k и распределение через k лет:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.33 \\ 0.33 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \left(y_0 + z_0\right) \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{bmatrix} +$$

$$+ \left(y_0 - 2z_0\right)\left(0.7\right)^k \begin{bmatrix} 0.33 \\ -0.33 \end{bmatrix}. \qquad (1.104)$$

Данное уравнение и есть искомое решение дискретного уравнения (1). Следует заметить, что множитель $\left(0.7\right)^k$ с увеличением k становится крайне малым и решение сходится к пределу

$$u_\infty = \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = \left(y_0 + z_0\right) \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{bmatrix}. \qquad (1.105)$$

Общее население, как и в начальный момент, равно $\left(y_0 + z_0\right)$, но в пределе (при $k = \infty$) $2/3$этого населения будет находиться вне г. Томска, а $1/3$ – внутри его. И это будет выполняться независимо от того, какое было начальное распределение. То есть, если год начинается с соотношения «$2/3$ вне и $1/3$ внутри», то он заканчивается в точности таким же соотношением. Это доказывается математически:

$$\mathrm{Au}_\infty = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{bmatrix} = u_\infty. \qquad (1.106)$$

Стационарное состояние представляет собой собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Приведённое описание марковского процесса является полностью детерминированным: население перемещается в фиксированной пропорции. Но если рассматривать отдельного человека, то правила его передвижения могут быть даны в вероятностной форме, т.е. если человек находится вне г. Томска, то с вероятностью $1/10$ он въедет в него, а если он уже в городе, то с вероятностью $2/10$ он выедет. Его перемещения становятся случайным процессом, и управляющая им матрица A называется *матрицей перехода*. Мы не знаем теперь точно, где находится человек, но каждый год компоненты вектора $u_k = A^k u_0$ определяют вероятность того, что он находится вне города, и вероятность того, что он находится в нём. Сумма этих вероятностей равна 1 (ведь должен этот человек где-то быть), и они никогда не становятся отрицательными. Это вновь приводит нас к двум фундаментальным свойствам матрицы перехода: сумма элементов каждого столбца матрицы равна 1 и каждый элемент удовлетворяет неравенству $a_{ij} \geq 0$. Основной момент теории состоит в том, чтобы понять, почему число $\lambda = 1$ всегда является собственным значением и почему соответствующий собственный вектор дает стационарное состояние. Первое объясняется следующим образом: каждый столбец матрицы $(I - A)$ имеет сумму элементов, равную 1–1 = 0. Поэтому строки матрицы $(I - A)$ при сложении дают нулевую строку, они линейно зависимы, матрица $(I - A)$ вырождена и число $\lambda_1 = 1$ является собственным значением для A. Кроме весьма частных случаев, вектор u_k будет постепенно приближаться к соответствующему собственному вектору. Это обеспечивается формулой $u_k = c_1\lambda_1^k x_1 + ... + c_n\lambda_n^k x_n$, в которой ни одно из собственных значений не может превосходить 1. В противном случае вероятности u_k будут расти, как числа Фиббоначи, что невозможно. Если все остальные собственные значения строго меньше 1, то первый член формулы будет доминирующим, а остальные числа λ_i^k будут быстро сходиться к нулю и $u_k \to c_1 x_1 = u_\infty$. Это стационарное состояние будет обеспечено, если матрица A не только отрицательна, но строго положительна, т.е. $a_{ij} > 0$. В этом случае вектор $c_1 x_1$ имеет только положительные компоненты, сумма их равна 1 и они являются предельными значениями вероятностей в марковском процессе.

Глава 2

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В простейшем варианте организацию можно рассматривать как некоторую структуру, осуществляющую превращение определённых ресурсов в конечный продукт. Поскольку этот процесс описывается в пространстве состояний, то можно оценить его эволюцию. Решение уравнения состояния можно представить как некоторую характеристику, которую можно изобразить в пространстве, и определение «заданная траектория» будет соответствовать определению «заданный план». Главная функция управления – обеспечить такое целенаправленное изменение в системе управления, чтобы заданный план постоянно пересматривался с целью его сохранения в изменяющихся условиях. Теория управления становится все более общепризнанной основой для развития методов обеспечения заранее определённых траекторий. Планирование и управление можно рассматривать как оценку и обеспечение некоторой траектории, которая является решением уравнения состояния, т.е. описывает движение в пространстве состояний. Законом управления обычно является закон с обратной связью, с помощью которого систему стремятся сделать менее чувствительной к изменениям параметров за счёт использования в основном текущей информации. Если имеет место возмущение, то отрабатывается ошибка и первоначально планируемые значения корректируются так, чтобы удержать переменные состояния вблизи желаемых значений. Обычно сравнивается цель с выходом системы и определяются способы его приближения к цели. При этом предполагается, что управление стабилизирует выход системы в окрестности цели. Это можно выполнить на основе известной динамики системы и закона управления. Если закон управления сформулирован достаточно точно, то изменение управления обеспечит требуемый результат.

2.1. Траектории движения линейных дискретных систем с управлением

Рассмотрим детерминированную линейную систему, представленную уравнением

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k., \tag{2.1}$$

где A, B – матрицы соответствующей размерности. Предположим, что заданы начальные условия x_0 вектора пространства состояний при $k=0$ и известны управляющие воздействия u_k на всём интервале $\{0, k-1\}$. Полагая последовательное изменение интервалов (тактов) дискретности $k = 0, 1, ...,$ запишем

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0,$$

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A^2 x_0 + ABu_0 + Bu_1,$$

$$x_3 = Ax_2 Bu_2 = A^3 x_0 + A^2 Bu_0 + ABu_1 + Bu_2 \qquad (2.2)$$

и т.д.

Следовательно, для любого $k > 0$ можно записать следующее уравнение:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j.,\qquad (2.3)$$

где A^k – есть k-кратное произведение матрицы A друг на друга. Из данного уравнения заключаем: в каждый момент времени преобразуется вектор предыдущего состояния с помощью матрицы A и суммируется слагаемое (Bu), учитывающее вклад нового значения управляющего воздействия. Это уравнение понимается как переходное уравнение системы и записывается следующим образом:

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{k-j-1} Bu_j\ ,\qquad (2.4)$$

где Φ_k – переходная матрица системы. Данное уравнение представляет вектор состояния в момент времени $k > 0$ в виде суммы двух составляющих:

- первое слагаемое - вклад начального состояния x_0;
- второе слагаемое – вклад последовательности управляющих воздействий u на интервале времени $\{0, k-1\}$.

Нестационарная линейная система, параметры которой зависят от времени, представляется следующим дискретным уравнением:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k.\qquad (2.5)$$

Следовательно, рекуррентные уравнения можно записать как

$$x_1 = A_0 x_0 + B_0 u_0,$$

$$x_2 = A_1 x_1 + B_1 u_1 = A_1 A_0 x_0 + A_1 B_0 u_0 + B_1 u_1 \qquad (2.6)$$

и т.д.

В результате переходное уравнение для $k > j$ можно записать в виде

$$\Phi_{k,j} = \prod_{i=j}^{k-1} A_i = A_{k-1} A_{k-2} ...... A_{j+1} A_j \,, \tag{2.7}$$

где $\Phi_{k,k} = I$ - единичная матрица.

Тогда
$$x_k = \Phi_{k,0} x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{k,j+1} B_j u_j . \tag{2.8}$$

Алгоритм многошагового анализа поведения детерминированных систем можно использовать и для систем с нечёткими состояниями. Так как операции умножения и сложения над нечёткими множествами рассматриваются как линейные преобразования, то при изменении элементов матрицы A, например, в интервале от 0 до 1 можно записать

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u_j \,, \tag{2.9}$$

где x_k, u_j - нечёткие множества. Эта нечёткая система представляет собой процесс, протекающий в пространстве нечётких состояний, которые имеют один и тот же носитель. При определённой последовательности входных переменных данное рекуррентное уравнение отражает возможность перехода системы за k тактов из некоторого начального состояния в фиксированное состояние x_k.

2.2. Управляющие воздействия в системах, описываемых билинейными уравнениями

Система называется билинейной, если она линейна по состоянию и по управлению в отдельности, но не линейна по этим переменным, взятым совместно. Однородное уравнение такой системы имеет вид (при равенстве нулю элементов матрицы B, т.е. в уравнении отсутствует слагаемое Bu_k):

$$x_{k+1} = \left(A + u_k L\right) x_k \,, \tag{2.10}$$

где L– действительная постоянная матрица соответствующей размерности. Решение этого уравнения записывается в виде

$$x_k = \prod_{i=0}^{k=1} \left(A + u_k L\right) x_0 = \psi\left(x_0, u_k\right). \tag{2.11}$$

2.3. Общие условия управляемости и наблюдаемости экономической системы

Система полностью управляема, если переменные управления выбираются таким образом, что обеспечивается переход системы из любого начального состояния в любое конечное состояние за конечный промежуток времени.

Система полностью наблюдаема, если измерения выходных переменных системы на некотором конечном интервале времени (число выходных переменных может быть меньше числа переменных состояния) содержат достаточно информации для того, чтобы полностью определить (восстановить) состояние системы. Понятие наблюдаемости обретает особую важность в тех случаях, когда необходима оценка переменных состояния, труднодоступных непосредственному измерению. Если система наблюдаема и возможны точные измерения, то те переменные состояния, которые непосредственно нельзя измерить, могут быть вычислены. Наиболее простым подходом для определения управляемости и наблюдаемости линейной системы является использование матричных преобразований над матрицами параметров векторно-матричных уравнений, описывающих динамику в пространстве состояний.

Главной функцией управляющего элемента системы является принятие решений, которые определяют дальнейшую последовательность действий организации. Наличие модели системы в пространстве состояний предполагает отдельное выделение входных (управляющих) воздействий. Следовательно, возникает вопрос: можно ли перевести систему из начального состояния в требуемое состояние за определённый интервал времени, используя допустимые входные воздействия? Линейная стационарная система будет управляемой, если её можно привести в нулевое состояние из любого другого состояния. Модель системы также предполагает достаточно точное определение её выхода для любого момента времени при заданном начальном состоянии и входном воздействии. Поэтому возникает ещё один вопрос: можно ли определить любое начальное состояние на основе регистрации значений выходной переменной в течение конечного интервала времени? Линейная стационарная система является наблюдаемой, если её нельзя преобразовать в строго эквивалентную систему с выходной переменной, не зависящей от одной или большего числа переменных состояния, т.е. если выход системы не зависит от переменной состояния, то система ненаблюдаемая.

2.4. Математические условия управляемости и наблюдаемости для линейных систем

Пусть экономическая система описывается дискретным уравнением следующего вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{2.12}$$

где A, B – единственные матрицы параметров системы соответствующей размерности. Траектория движения системы описывается уравнением

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j. \tag{2.13}$$

В случае линейных систем интерес представляют состояния, достижимые из нулевого начального состояния $x_0 = 0$. В этом случае первое слагаемое в уравнении равно нулю ($A^k x_0 = 0$) и вектор x_k состояния будет равен

$$x_k = \left[A^{k-1}BA^{k-2}.....A^0 B\right] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Для выполнения этого равенства необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица Q, равная

$$Q = [A^{k-1}B \mid A^{k-2}B \mid ..... \mid A^0 B] = [A^{k-1}B \mid A^{k-2}B \mid ..... \mid B] \tag{2.15}$$

(матрицу A^0 можно заменить единичной матрицей I, а произведение $A^0 B = B$), имела ранг n, т.е. $rank\ Q = n\ \ rank$. Теперь рассмотрим понятие управляемости и рассмотрим случай, когда система переводится в нулевое состояние из любого другого состояния, т.е. находится такая последовательность $\{u_0, u_1, ...u_{k-2}, u_{k-1}\}$ управляющих воздействий, что выполняется уравнение

$$0 = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j. \tag{2.16}$$

Таким образом, система управляема, если существует последовательность $\{u_0, u_1, ... u_{k-2}, u_{k-1}\}$ управляющих воздействий, такая, что имеется равенство

$$A^k x_0 = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\left(-u_j\right). \tag{2.17}$$

Состояние $\left(A^k x_0\right)$ будет достижимо за k шагов тогда, когда вектор $\left(A^k x_0\right)$ будет линейной комбинацией столбцов Q, т.е. при выполнении условия $rank \;\; Q = n.$ Во многих случаях требуется, чтобы некоторое состояние системы было достигнуто за приемлемый промежуток времени при ограниченных значениях управляющих воздействий. При этом определение управляемости системы целесообразно заменить на определение достижимости. Поскольку описать множество достижимости для всех переменных в общем случае невозможно, то используются конкретные соотношения, основанные на уравнениях системы. Так, для линейной системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.18}$$

её движение представляется комбинацией матриц $A, B.$ Например, при движении из нулевого начального состояния (из начала координат) значения x_1 должны быть некоторой комбинацией столбцов матрицы B. Аналогичным образом значения x_2 должны быть комбинацией столбцов расширенной матрицы$\left[AB\; B\right]$. Возрастание значений x_k может продолжаться вплоть до $k = N$ (где N – количество тактов или шагов), когда расширенная матрица принимает вид $\left[A^{N-1}B\; A^{N-2}B \dots . B\right]$. Согласно теореме Кэли-Гамильтона матрицу$\left[A^N B\right]$ можно записать в виде линейной комбинации матриц $B, ..., A^{N-1}$так, что, начиная с такта N, изменение значений x_k должно прекратиться. Тогда множество состояний, достижимое из начального состояния не более чем за N тактов, при использовании ограниченных управляющих воздействий (ограничения типа $\left[u_k\right] < U_{\text{огр.}}$), определяется уравнением

$$x_N = A^{N-1}Bu_1 + A^{N-2}u_2 + ... Bu_N\, . \tag{2.19}$$

Другая проблема, которая представляет интерес, – это определение уровня управляющих воздействий, обеспечивающих достижения некоторого состояния за заданное количество тактов (ограничения по времени перехода из одного пространства в другое). Тогда управляющие воздействия, переводящие систему из начала координат в состояние x_R за R тактов дискретности, должны удовлетворять условию

$$x_R = \left[B \; AB \,.....\, A^{R-2}B \; A^{R-1}B\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{R-1} \\ u_R \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Обозначим $W = \left[u_1^T \,.....\, u_R^T\right]^T$ и запишем данное уравнение в виде

$$x_R = ZW. \tag{2.21}$$

Тогда можно предположить, что существует единственная матрица $W = \sum \beta_i z_i$,

где z_i – это i-я строка матрицы Z. Значения β_i можно определить из уравнения $\beta \; ZZ^T = x_R$. (2.22)

Таким образом, значения управляющих воздействий определяются параметрами системы и её состоянием, достигаемым за R тактов дискретности.

Для оценки наблюдаемости необходимо определить зависимость выходных переменных от переменных состояния на всём интервале функционирования системы. Математически эта зависимость определяется по траектории движения системы в пространстве состояний. Во многих системах вектор выходных (измеряемых) переменных может быть сформирован в соответствии с уравнением

$$y_k = Cx_k, \tag{2.23}$$

где C – матрица соответствующей размерности, характеризующая техническую возможность измерения компонент вектора состояния.

Тогда в соответствии с уравнением

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu_j, \tag{2.24}$$

записываем: $$x_k = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu_j. \tag{2.25}$$

Первое слагаемое $\left(CA^k x_0\right)$ в данном уравнении называется откликом на нулевой входной сигнал: это означает, что при любом состоянии x_0 на вход подаётся последовательность, составленная из k нулевых сигналов. Два состояния $\overset{\wedge}{x_0}$ и $\overset{*}{x_0}$ различимы за k тактов, если найдётся по меньшей мере одна входная последовательность, для которой выходы системы будут различными. Тогда можно записать уравнение

$$y^{\wedge} - y^{*} = CA\left(x_0^{\wedge} - x_0^{*}\right). \tag{2.26}$$

В результате преобразований (используя замечания по поводу достижимости) математическое условие наблюдаемости системы, представленной матрицами A, B, C размерности n, записывается следующим образом

$$rank\ Q^{*} = n,$$

где матрица Q^{*} представляет блочную матрицу

$$Q^{*} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{k-1} \\ CA^{k} \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

2.5. Математические условия управляемости и наблюдаемости для билинейных систем

Из определения билинейных систем следует, что ранговые условия управляемости линейных систем непосредственно на билинейные системы не распространяются. Вследствие билинейности (нелинейности) такие системы приобретают адаптивные свойства и являются лучше управляемыми, чем линейные системы.

Следует признать, что экономическая система может не быть полностью управляемой в том смысле, что некоторое значения пространства могут не быть достижимыми ни при каком допустимом управлении. В том случае, когда значения вектора управления ограничены некоторым множеством, линейные системы почти никогда не являются полностью управляемыми. При переходе к билинейным системам эта трудность исчезает. Рассматривая, например, системы с законами управления в виде обратной связи по состоянию, элементы матрицы параметров разомкнутой системы будут включать слагаемые, зависящие от управления:

$$\left(A + \sum_i L_i u_i(k)\right). \qquad (2.28)$$

Соответственно управляющие воздействия позволяют эффективно влиять на собственные значения матрицы разомкнутой и замкнутой системы.

2.6. Построение дискретных законов управления экономической системой с прогнозированием

Управление с прогнозированием – это метод управления, в котором предвосхищаются возмущения. Очевидно, что для осуществления такого управления необходима информация о динамике системы. Таким образом, в моделях можно пользоваться относительно грубыми методами управления, а в реальную систему передавать лишь конечные результаты. Этот подход используется также для исследования, как пространства входных воздействий, так и пространства параметров, что позволяет получить наилучшие результаты в смысле выбранного критерия качества.

Рассмотрим систему производства и управления запасами, представленную уравнениями

$$\begin{aligned} x_{1k+1} &= x_{1k} + \alpha\left(x_{3k} - x_{1k}\right) \\ x_{2k+1} &= x_{2k} + x_{1k} - f_k \quad , \\ x_{3k+1} &= x_{3k} + u_k \end{aligned} \qquad (2.29)$$

где $x_{1\,k}$ – объём продукции; $x_{2\,k}$ - объём запасов; $x_{3\,k}$ - производственный потенциал; f_k - объём поставок потребителю; u_k - вводимые производственные мощности.

Задача заключается в выборе такого управления u_k, чтобы получить требуемые собственные значения характеристического уравнения системы. В векторно-матричной форме данные уравнения записываются как

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \qquad (2.30)$$

где $$A=\begin{bmatrix}(1-\alpha) & 0 & \alpha\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \qquad (2.31)$$

Рассмотрим выполнение условия управляемости такой системы. Запишем матрицу управляемости

$$Q=\left\lfloor B\ AB\ .....\ A^2B\right\rfloor. \qquad (2.32)$$

Осуществляя необходимые преобразования, можно записать

$$Q=\begin{bmatrix}0 & \alpha & (2-\alpha)\alpha\\ 0 & 0 & \alpha\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (2.33)$$

Анализ данной матрицы показывает, что её ранг равен 3, следовательно, система управляема. Организуем управление системой в виде линейной обратной связи по состоянию:

$$u_k=m_1x_{1\,k}+m_2x_{2\,k}+m_3x_{3\,k} \qquad (2.34)$$

или $$u_k=M\,x_k,\ M=[m_1\ m_2\ m_3],\ x_k=[x_1\ x_2\ x_3]^T. \qquad (2.35)$$

Тогда уравнение системы с обратной связью примет вид

$$x_{k+1}=(A+BM)\,x_k. \qquad (2.36)$$

Характеристическое уравнение системы с обратной связью записывается следующим уравнением:

$$\det(\lambda\, I-A-BM)=0. \qquad (2.37)$$

Поскольку система управляема, то желаемые собственные значения характеристического уравнения можно получить путём соответствующего выбора элементов матрицы M. Главный недостаток управления с обратной связью состоит в том, что текущие значения переменных состояния в моменты формирования управляющих воздействий предполагаются известными. В реальной ситуации не все переменные состояния можно использовать для формирования управляющих воздействий. Кроме того, процесс измерения или контроля переменных может сопровождаться эффектом запаздывания (временные задержки в устройствах обработки и передачи информации).

Рассмотрим случай, когда выходная величина равна $x_{2\,k-1}$, т.е. количеству запасов в предыдущий момент времени $(k-1)$

$$y_k = x_{2\,k-1}. \tag{2.38}$$

Если рассматривать элемент запаздывания, как составную часть всей управляемой производственной системы, то можно записать расширенную систему со следующим вектором состояния

$$z_k = \left[x_1\ x_2 x_3\ x_{2\,k-1}\right]^T. \tag{2.39}$$

Уравнения состояния для расширенной системы будет иметь вид

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{matrix} A & 0 \\ H & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \tag{2.40}$$

где $H = [0\,1\,0]$.

Уравнение выхода для расширенной системы будет записываться следующим образом

$$y_k = [0\,0\,0\,1]\, z_k. \tag{2.41}$$

Таким образом в алгоритме управления системой с прогнозированием будут использоваться предыдущие значения одной из переменной состояния.

Глава 3
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Линейное программирование – наиболее часто используемый математический метод при исследовании экономических систем, особенно для построения оптимальных программ развития предприятий и организаций. Для конкретного предприятия можно сформировать различные варианты плана производства его продукции или оказания услуг. Вариант плана, являющийся наилучшим с позиций достижений уровня определенного показателя, например прибыли или производительности, называется *оптимальным.* Процесс составления такого плана называется *оптимальным планированием*. Непременным условием применимости метода линейного программирования, позволяющего получить решение экстремальных задач, является линейная зависимость между неизвестными переменными и наличием линейного критерия (экстремальные задачи – это задачи, при решении которых определяется экстремум функции – её максимум или минимум). Впервые в 1938 г. Л.В. Канторович использовал методологию линейного программирования для практического составления наилучшей производственной программы. Однако термин «линейное программирование» появился в 1951 г. в работах Дж. Б. Данцига и Т. Купманса (США). Задачи линейного программирования формируются при обязательном наличии ограничений на производственную мощность, материальные, финансовые, трудовые ресурсы и т.д.

Как уже отмечалось, необходимым условием решения задачи линейного программирования является наличие количественно оцениваемого критерия оптимальности плана. Показатель, по которому оценивается мера эффективности плана, его оптимальность, называется *критерием оптимальности*. Критерий оптимальности должен соответствовать следующим требованиям:

- быть единственным при решении задачи оптимизации;
- количественно вычисляться или измеряться.

3.1. Математическая формулировка задач линейного программирования

Задача линейного программирования формулируется следующим образом. Пусть имеем экономическую систему или процесс, который в пространстве положительных переменных моделируется линейными алгебраическими уравнениями с известными коэффициентами. Эти уравнения могут иметь вид равенств или неравенств. Например:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \ge b_1,\\
&a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k.
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Предполагается, что переменные положительны:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \qquad (3.3)$$

Задана также целевая функция, характеризующая деятельность экономической системы или протекания производственного процесса

$$F(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n. \qquad (3.4)$$

При этом коэффициенты $a_{11},\ldots,a_{mn}, b_1,\ldots_m, c_1,\ldots, c_n$ в уравнениях и целевой функции – действительные числа, которые могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Задача заключается в определении максимального или минимального значения целевой функции $F(x)$ в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ с учётом ограничений. В векторно-матричной форме эта задача записывается следующим образом: обеспечение экстремальности $F(x) = cx \to \max(\min)$ при ограничениях $Ax \ge b$ и/или $Ax \le b$ и $x \ge 0$. Здесь приняты следующие обозначения: c, x, b – векторы соответствующей размерности; A – матрица. Следует отметить, что задача минимизации может быть приведена к задаче максимизации путём преобразования – умножения коэффициентов целевой функции $F(x)$ на (-1). Критериальная функция и система ограничительных неравенств формируется конкретно для каждой решаемой задачи. Например, формирование годовой производственной программы предполагает установление номенклатуры выпускаемой продукции и объема выпуска по каждой номенклатурной позиции. При этом программа выпуска может формироваться по различным критериальным признакам: максимизация объёма выпуска в стоимостном выражении, максимизация получаемой от реализации прибыли, максимальное удовлетворение общества в продукции предприятия. В качестве ограничительных условий могут быть использованы не только ресурсные показатели, но и показатели, характеризующие выпуск продукции в стоимостном выражении, допустимое отклонение выпуска продукции от средней величины и т.д.

К типовым задачам линейного программирования относятся задачи о наилучшем составе различных сред и смесей (состав шихты, рацион питания), выборе производственной программы, оптимальном плане выпуска продукции, планировании перевозок (транспортная задача), планировании размещения производства.

3.2. Общая характеристика симплекс - метода

Одним из методов решения задач линейного программирования является симплексный метод. Симплекс (латинское слово) – простой. В геометрии означает выпуклый простейший многогранник в пространстве некоторого числа переменных. При количестве переменных $n = 3$ – это трёхмерный симплекс (тетраэдр), $n = 2$ – треугольник, $n = 1$ – отрезок, $n = 0$ – точка.

Основная идея симплекс-метода состоит в следующем:

- принимается за основу (базовый вариант) одна из возможных программ – опорный план;
- осуществляется её пошаговое улучшение до момента получения оптимума по заданной критериальной функции.

Таким образом, решение задачи сводится к определению опорного варианта программы и нахождения способа его улучшения. При этом первоначальный вариант программы предполагает резерв тех ресурсов, которые регламентируются в исходной производственной ситуации. В процессе преобразований одни переменные вводятся в план, другие исключаются из него. В результате с каждым шагом план приближается к оптимальному плану, если в исходных условиях задачи нет противоречий. Таким образом, за счёт пошагового перераспределения ресурсов между планируемыми на выпуск изделиями находится оптимальное сочетание номенклатуры и количества этих изделий.

Пример задачи планирования производства

Составим план выпуска трёх типов изделий при ограниченном объёме материала трёх сорторазмеров, которые используются при изготовлении этих изделий. Целью решения задачи является составление плана, обеспечивающего получение максимальной прибыли от его выполнения. Условия задачи целесообразно записать в виде таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Нормы расхода ресурсов и получения прибыли на единицу продукции

Тип изделия	Норма расхода материала			Прибыль на единицу изделия
	1	2	3	
1	a_{11}	a_{21}	a_{31}	c_1
2	a_{12}	a_{22}	a_{32}	c_2
3	a_{13}	a_{23}	a_{33}	c_3
Фонд материалов	b_1	b_2	b_3	

Обозначая количество типов изделий $1-x_1, 2-x_2, 3-x_3$, заданные ограничения запишем в форме неравенств

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Количество выпускаемых изделий должно быть неотрицательно, т.е.

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{3.6}$$

Требуется найти такие значения x_1, x_2, x_3, которые обеспечивали бы максимальную прибыль

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max. \tag{3.7}$$

Для решения задачи с использованием метода линейного программирования заданные ограничения в виде неравенств должны быть преобразованы в соответствующие равенства. Это осуществляется путём добавления к левой части исходных неравенств положительной дополнительной величины. Количество дополнительных переменных должно быть равно количеству неравенств. Для данного примера введём следующие переменные x_4, x_5, x_6 и запишем преобразованную систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_6 = b_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Смысл дополнительных переменных в данном случае заключается в том, что они характеризуют величину неиспользованного ресурса. Если заданные ограничения имеют форму неравенства вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \tag{3.9}$$

то для преобразования этого неравенства необходимо каждое слагаемое неравенства умножить на (-1) и к левой части неравенства добавить дополнительные переменные. Для данного неравенства можно записать

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3 = -b_1. \tag{3.10}$$

3.3. Решение задач линейного программирования в графическом виде на плоскости

Рассмотрим геометрическую формулировку задач линейного программирования на примере уравнения $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j$. Это уравнение определяет прямую линию на плоскости, если коэффициенты a_{j1}, a_{j2} не равны нулю одновременно. При этом данная прямая делит плоскость на две полуплоскости. Следовательно, неравенство $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \le b_j$ описывает множество точек (x_1, x_2), расположенных на полуплоскости по одну сторону прямой линии, включая и саму прямую. Эти точки являются допустимыми относительно рассматриваемого неравенства. Таким образом, при графическом представлении ограничений первоначально изображается прямая, а затем определяется (штрихуется) та часть отсекаемого пространства, которая является допустимой. Рассмотрим несколько вариантов расположения прямых на плоскости в пространстве двух переменных x_1, x_2:

- рис. 3.1, рис. 3.2 – неограниченные области;
- рис. 3.3 – многоугольник;
- рис. 3.4 – отрезок;

- рис. 3.5 – область, состоящая из единственной точки;
- рис. 3.6 – область допустимых решений пуста (допустимые решения отсутствуют).

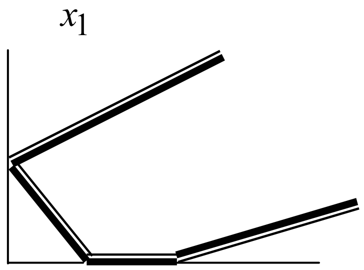

Рис. 3.1

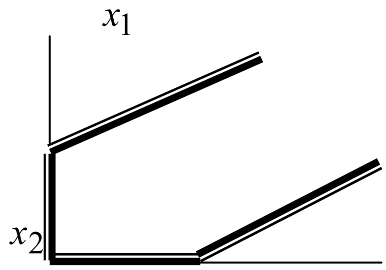

Рис. 3.2

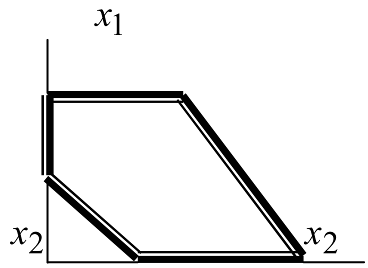

Рис. 3.3

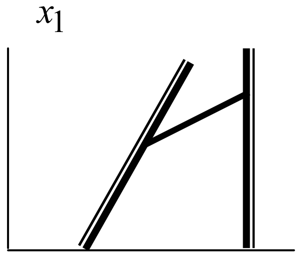

Рис. 3.4

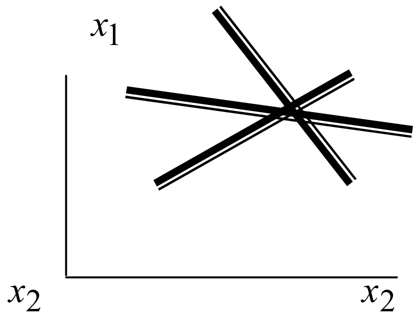

Рис. 3.5

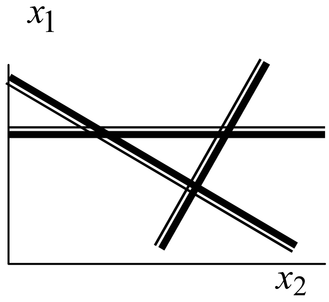

Рис. 3.6

Решение задачи линейного программирования можно получить, если допустимая область существует. Заметим, что допустимая область представляет собой выпуклый многогранник. Задача линейного программирования имеет свои особенности:

- если целевая функция $F(x)$ имеет максимум (минимум) на выпуклом многограннике допустимых решений, то он достигается в вершине этого многогранника;
- если целевая функция $F(x)$ имеет максимум (минимум) более чем в одной вершине выпуклого многогранника допустимых решений, то он достигается в любой точке, являющейся линейной комбинацией этих вершин.

Пример геометрического решения задачи линейного программирования

Пусть некоторое производство в пространстве двух переменных характеризуется следующими уравнениями:

$$(1)\, x_1 + 3x_2 \le 30; \quad (2)\, 6x_1 + x_2 \le 60; \quad (3)\, x_2 \le 8; \quad (4)\, -4x_1 + 3x_2 \le 15;$$
$$(5)\, 3x_1 + 5x_2 \ge 15; \quad (6)\, 7x_1 + 2x_2 \ge 14; \quad (7)\, x_1 \ge 0; \quad (8)\, x_2 \ge 0; \qquad (3.11)$$

Целевая функция представлена уравнением

$$F(x) = 2x_1 + 7x_2 \to \max . \tag{3.12}$$

На рис. 3.7 приведена графическая интерпретация решения задачи линейного программирования.

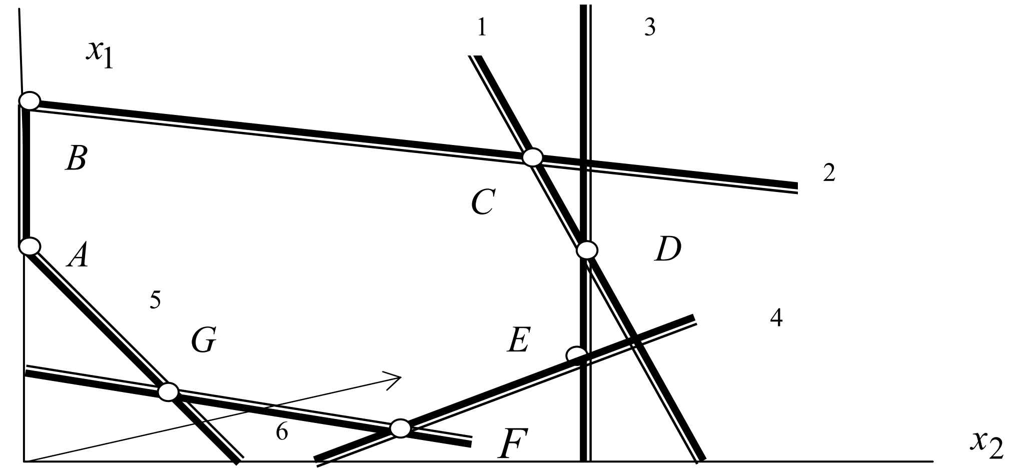

Рис. 3.7. Графическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Так как к моменту решения задачи значение целевой функции $F(x)$ неизвестно, то её можно представить семейством прямых параллельных при различных значениях $F(x)$. Этим параллельным прямым ортогонален вектор-градиент

$$\nabla F = [\partial F / \partial x_1 \; \partial F / \partial x_2]^T = [2 \; 7]^T . \tag{3.13}$$

Этот вектор-градиент указывает направление скорейшего возрастания функции $F(x)$. С геометрической точки зрения исходная задача может быть сформулирована следующим образом: определить такое максимальное значение $F(x)$, при котором прямая $2x_1 + 7x_2 = F(x)$ пересекает допустимое множество. Для данного примера такой точкой является точка D с координатами $x_1 = 6, x_2 = 8$. Данные расчётов значений целевых функций в угловых точках приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Расчёт значений целевой функции

Индекс вершины	Координаты вершины		Значение целевой функции
	x_1	x_2	
A	5	0	10
B	10	0	20
C	150/17 = 8,82	120/17 = 7,06	1140/17 = 67,06
D	6	8	68
E	9/4 = 2,25	8	121/2 = 60,5
F	12/29 = 0,41	161/29 = 5,55	1151/29 = 39,69
G	40/29 = 1,38	63/29 = 2,17	521/29 = 17,96

3.4. Решение задач линейного программирования с использованием симплекс - таблицы

Для составления симплекс-таблицы ограничения должны быть записаны в виде равенств

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{3.14}$$

и неравенств $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$.

Целевая функция формируется в виде

$$F(x) = c_1x_1 + ... + c_nx_n. \tag{3.15}$$

Данный подход предусматривает выполнение следующих этапов:

- формирование целевой функции и определение граничных условий, которые могут иметь вид равенств или неравенств;
- преобразование ограничений из неравенств в систему равенств путём ввода вспомогательных переменных (эти переменные имеют экономическое содержание и характеризуют резерв тех ресурсов, по которым вводится ограничение);
- построение исходной симплексной таблицы – матрицы, в которой в формируемый план входят только свободные переменные. Таблица имеет следующий вид:

Таблица 3.3

Симплекс-таблица

Базис	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}	b_j
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1_n}	1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2_n}	0	1	0	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	1	b_m
$F(x)$	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	0	

- построение опорного плана;
- ввод в исходный вариант плана реальных переменных и вычисление значений целевой функции;
- определение аргумента, доставляющего экстремум целевой функции и запись его в качестве элемента плана.

При этом каждый из показателей, характеризующий ограничительное условие, делится на соответствующий коэффициент при вводимой переменной – удельный расход данного ресурса. Тогда наименьшее частное определит максимально возможное в условиях принятых ограничений использование ресурсов при заданном критерии оптимальности. Полученный результат вводится в соответствующую строку симплексной таблицы. По этой строке матрицы весь ресурс исчерпан, она является узким местом и подлежит выводу. На её место вводится новая строка, предварительно пересчитанная. Формируется новый вариант симплексной таблицы, соответствующий k-той итерации. Пересчёт строки ведётся по разрешающему элементу, находящемуся на пересечении строки с номером вводимой переменной и столбца с номером выводимой переменной. Каждый элемент вводимой строки необходимо разделить на разрешающий элемент. Все остальные элементы матрицы пересчитываются по столбцам по следующим правилам:

1) значения столбцов, в которых в строке разрешающего элемента стоит ноль, переносятся в новую матрицу без изменения;

2) при пересчёте остальных столбцов необходимо из первоначального значения соответствующих элементов вычесть произведение

элемента вводимой строки этого столбца на соответствующий коэффициент в столбце разрешающего элемента.

Последовательность расчётов с использованием симплекс-таблицы можно представить в виде блок-схемы (рис. 3.8).

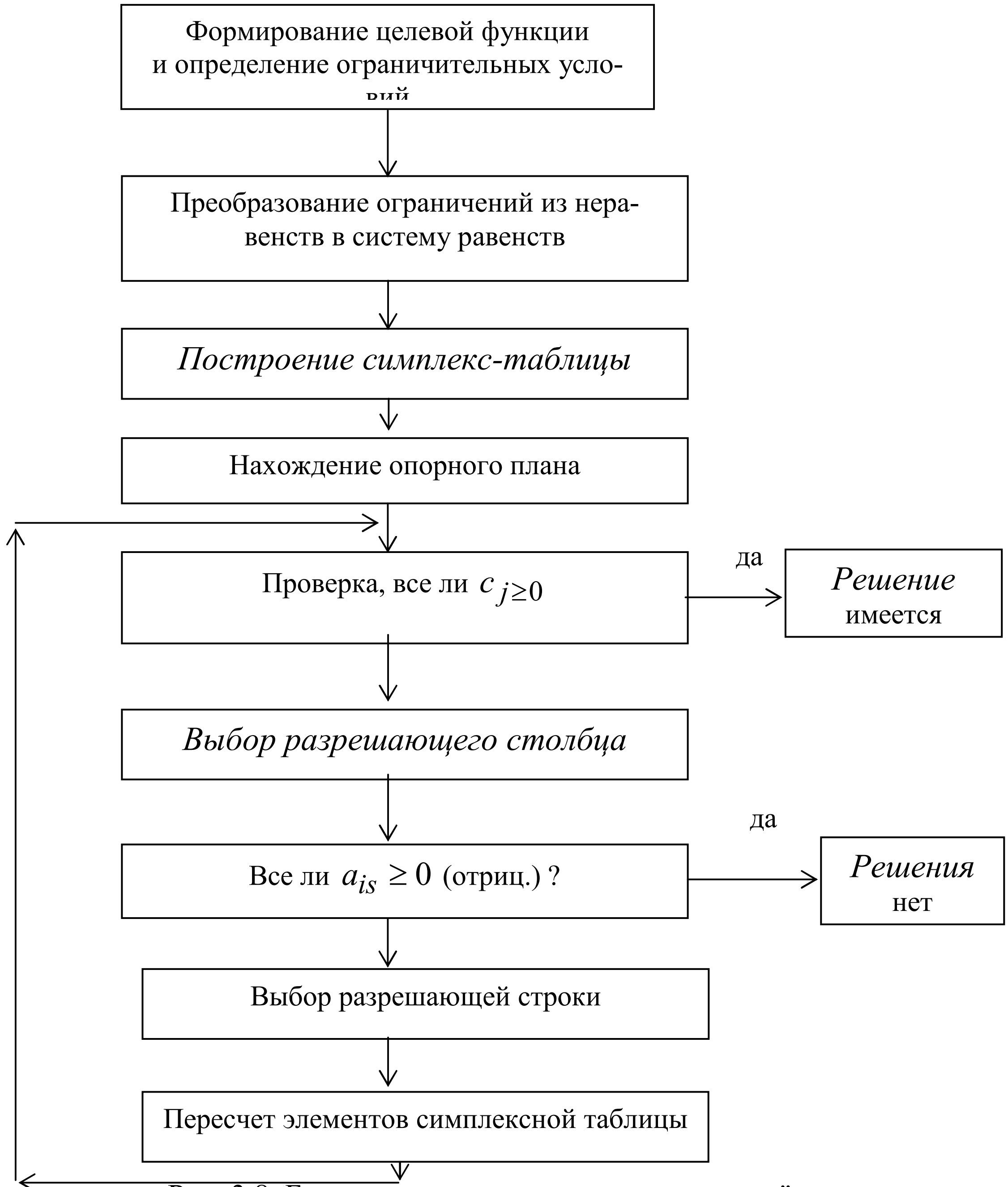

Рис. 3.8. Блок-схема последовательности расчётов
с использованием симплекс-таблицы

Матрица будет оптимальной, если первая строка не содержит отрицательных чисел, т.е. располагаемые ресурсы полностью использованы. Если матрица неоптимальная, то вводятся новые переменные, выбираемые из набора, сформированного по ограничительным условиям и критериальной функции, и содержащиеся в последнем варианте симплекс-таблицы, т.е. производится следующий шаг по улучшению матрицы. Далее расчёт осуществляется аналогичным образом, как описано выше.

Пример решения задачи линейного программирования для случая выпуска трёх изделий

Исходные данные задачи линейного программирования приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Исходные данные для решения задачи линейного программирования

Тип изделия	Нормативная трудоемкость по группам оборудования, час.			Оптовая цена одного изделия, руб.
	1	2	3	
A	60	40	-	100
B	10	20	10	120
C	30	-	-	200
Фонд времени, час.	600	300	200	

Решение задачи рассмотрим по этапам.

Этап 1. Обозначая x_1, x_2, x_3, соответственно количество изделий - A, B, C, формируем целевую функцию

$$F(x) = 100x_1 + 120x_2 + 200x_3 \to \max . \qquad (3.16)$$

Ограничения по пропускной способности оборудования записываются уравнениями

$$\begin{aligned} &60x_1 + 10x_2 + 30x_3 \le 600; \\ &40x_1 + 20x_2 \le 300; \\ &10x_2 \le 200; \qquad (3.17) \\ &x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Этап 2. Вводим дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 (по количеству неравенств) и неравенства (3.17) преобразуем в равенства

$$\begin{aligned} &60x_1 + 10x_2 + 30x_3 + x_4 = 600; \\ &40x_1 + 20x_2 + x_5 = 300; \\ &10x_2 + x_6 = 200; \end{aligned} \tag{3.18}$$

Этап 3. Составим исходную симплекс-таблицу (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Исходная симплекс-таблица

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_j
x_4	60	10	30	1	0	0	600
x_5	40	20	0	0	1	0	300
x_6	0	10	0	0	0	1	200
$F(x)$	100	120	200	0	0	0	$F(x=0)$

Этап 4. Проверка условия $c_i \le 0 \, (i = 1, (n+m))$. Если $c_i \le 0$, то данное решение будет оптимальным. При значении $c_i > 0$ – переходим к следующему этапу. В данном примере $c_i = (100, 120, 200, 0, 0, 0)$.

Этап 5. Определяем индекс разрешающего столбца и вводимой переменной по условию

$c_r = \max \{c_k\} \, (k = 1, (n+m)) : c_r = \max(100, 120, 200) = 200$, т.е. $r = 3$. Поэтому вводим переменную x_3.

Этап 6. Проверяем условие: $a_{jr} \le 0 \, (j = 1, m)$.

Если это условие выполняется, то целевая функция является неограниченной и решение задачи не существует. При условии

$a_{jr} > 0$ переходим к следующему этапу. Приняты следующие обозначения: r - индекс разрешающего столбца, j - индекс строки. Записываем:

$$a_{13} = 30 \geq 0,$$
$$a_{23} = 0, \tag{3.19}$$
$$a_{33} = 0.$$

Этап 7. Выбираем разрешающую строку и выводимую переменную по условию: $D_s = \min\{b_j / a_{jr}\}$ только при $a_{jr} > 0\left(j = \overline{1,m}\right)$. Индексы r (столбец) и s (строка) определяют разрешающий элемент. $D_s = \min(600/30; -; -)$. Выводим $x_4 = 20$ (b_1 / a_{13}), $s = 1$. Разрешающий элемент a_{13} = 30.

Этап 8. Перерасчёт элементов симплекс-таблицы – первая итерация осуществляется по следующим формулам:

$$a^*_{jr} = a_{ji} - a_{jr}\ a_{si} / a_{sr},\ i = \overline{1,(n+m)};\ i \neq r;\ j = \overline{1,m};\ i \neq s;$$
$$a^*_{jr} = 0,\ j = \overline{1,m};\ j \neq s;\ a^*_{sr} = 1;\ a^*_{si} = a_{si} / a_{sr},\ i = \overline{1,(n+m)};\ i \neq r;$$
$$b^*_j = b_j - b_s\ a_{jr} / a_{sr},\ j = \overline{1,m};\ j \neq s;\ b^*_s = b_s / a_{sr};$$
$$c^*_i = c_j - c_r\ a_{sj} / a_{sr},\ i = \overline{1,(n+m)};\ i \neq r;\ c^*_r = 0; \tag{3.20}$$

$$2 = 60/30, 1/3 = 10/30, 1 = 30/30, 20 = 600/30.;$$
$$-300 = (100 * 30 - 200 * 60)/30, 160/3 = (120 * 30 + 200 * 10)/30.$$
$$-20/30 = (0 * 30 - 200 * 1)/30, -4000 = 0 * 30 - 200 * 600.$$

По результатам расчётов первой итерации заполняем симплекс-таблицу (табл. 3.6).

Таблица 3.6

Симплекс-таблица по результатам расчёта первой итерации

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_j
x_3	2	1/3	1	1/30	0	0	600
x_5	40	20	0	0	1	0	300
x_6	0	10	0	0	0	1	200
$F(x)$	-300	160/3	0	-20/3	0	0	$F(x)$ = -4000

Переходим к этапу 4.

Этап 4. Проверка условия $c_r \le 0$. Имеем $c_r > 0$ и переходим к этапу 5.

Этап 5. После всех расчетов c_r (160/3). Определяем индекс разрешающего столбца и вводимой переменной, т.е. $r = 2$. Поэтому вводим x_2.

Этап 6.

$$\begin{aligned} &a_{12} = 30 > 0, \\ &a_{22} = 20 > 0, \\ &a_{32} = 10 > 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Этап 7. $D_s = \min(20/1/3; 300/20; 200/10) = 51$, т.е. $s = 2$. Выводим $x_5 = 20$. Разрешающий элемент $a_{22} = 20$.

Этап 8. Пересчёт элементов симплекс-таблицы – вторая итерация, результаты которой сводятся также в таблицу (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Симплекс-таблица по результатам расчётов второй итерации

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_j
x_3	4/3	0	1	1/30	-1/60	0	15
x_2	2	1	0	0	1/20	0	15
x_6	20	0	0	0	1/2	1	200
$F(x)$	-1220/3	0	0	-20/3	-8/3	0	$F(x)$ = **-4800**

$4/3 = (2*20 - 40*1/3)/20, 2 = 40/20, 1/20 = 1/20, 15 = 300/20$
$1/60 = (1/60*20 - 0*1/3)/20, -1220/3 = (-300*20 - 160/3*40)/20$
$15 = (20820 - 3*1/3)/20, -8/3 = 0*20 - 160/3*1)/20;$
$-4800 = (4000*20 - 160/3*30)/20.$
Переходим к этапу 4.

Этап 4. Проверка условия $c_i \le 0$. Условие выполняется и решение задачи линейного программирования завершено.

Примечание. При получении нецелочисленных значений свободных переменных b_j эти значения округляются до целых значений в соответствии со значениями в системе ограничений.

Анализ полученных результатов

В план должны быть включены изделия $B(x_2)$ и $C(x_3)$ в количестве по 15 шт. каждое. Изделие $A(x_1)$ в план не включается как наиболее трудоемкое и дешевое. При этом значение целевой функции достигает максимума: 4800 руб.

3.5. Особенности задач линейного программирования

Особенностями задач линейного программирования является то, что множество допустимых решений представляет собой выпуклый многогранник, а наибольшее значение целевая функция принимает в одной из его вершин. В геометрической интерпретации симплекс-метод представляет собой метод целенаправленного перебора вершин допустимого многогранника. Поэтому его иногда называют методом градиентного, или наискорейшего, спуска вдоль ребер выпуклого многогранника допустимых решений. Для поиска экстремума необходимо:

- выбрать направление спуска;
- определить величину шага.

В симплекс-методе выбирается направление спуска вдоль того ребра многогранника, на которое проекция градиента целевой функции максимальна. Таким образом, обеспечивается выбор направления скорейшего увеличения целевой функции.

Приложение 1

ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

П.1.1. Векторно-матричное представление данных о деятельности предприятий

Матричная алгебра изучает алгебраические операции над массивами функций, переменных, чисел. При этом предполагается, что каждый массив представляет собой единое целое, и он обозначается одним символом. Матрица – это прямоугольный массив чисел, символов, функций, расположенных по строкам и столбцам. Матричную алгебру ценят за краткость, простоту и ясность. Особенно привлекателен универсальный характер матричных выражений, так как одни и те же методы исследований можно приложить к малым и большим массивам исходных данных, т.е. матричная алгебра позволяет выразить в математической форме большие и малые задачи независимо от их размерности.

Далее будем рассматривать систему линейных алгебраических скалярных или матричных уравнений. Допустим, что некоторое предприятие располагает данными о продажах в течение двух месяцев по типам продукции и районам сбыта. Эти данные сформированы в табл. П.1.1. Например, для прошедшего месяца имеем следующие цифры:

Таблица П. 1.1

Данные о продажах прошедшего месяца

Тип продукции	Районы продажи		
	1	2	3
Электродвигатели	98	24	42
Подшипники	39	15	22
Вентиляторы	22	15	17

Аналогичную таблицу можно создать и для предыдущего месяца.

Таблица П. 1.2

Данные о продажах предыдущего месяца

Тип продукции	Районы продажи		
	1	2	3
Электродвигатели	55	19	44
Подшипники	43	53	38
Вентиляторы	11	40	20

Сформируем данные в таблицах в виде матриц A (табл. П.1.1) и B (табл. П.1.2) размерностью 3х3:

Рассчитаем, например, общее количество электродвигателей, проданных в районе 1 в течение двух месяцев. Очевидно, это количество будет равно сумме элементов, расположенных в каждой таблице на пересечении первой строки и первого столбца: $98+55=153$. Рассматривая матрицы A и B, отметим, что такой же результат будет при сложении элементов a_{11} и b_{11} (пересечение первой строки и первого столбца). Элементы матриц обозначаются следующим образом, например, a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. В общем случае i изменяется от 1 до n, j изменяется от 1 до m. Такая матрица называется *прямоугольной*. При количестве строк матрицы, равных количеству столбцов, т.е. $n=m$, матрица называется *квадратной*.

В результате можно сформировать матрицу, элементы которой будут характеризовать количество реализованных всех видов продукции по всем районам за два месяца. В символьном виде этот результат записывается следующим образом: $A+B=C$. Очевидно, что результат вычислений не зависит от перестановки матриц A и B местами. В том случае, когда в предыдущем месяце не было продаж, элементы матрицы B равны нулю, и данная матрица называется *нулевой матрицей*. Если элементы квадратной матрицы на пересечении одноименных строк и столбцов не равны нулю (элементы главной диагонали), а все ее остальные элементы равны нулю, то такая матрица называется диагональной. При равенстве элементов главной диагонали квадратной матрицы единице – такая матрица называется единичной и обозначается I. При умножении матрицы на скалярную величину все элементы этой матрицы умножаются на данную величину.

Рассмотрим следующий подход для данного примера. Допустим, имеем информацию о реализации продукции за два месяца, например за текущий месяц. Очевидно, чтобы получить количественные данные о реализации продукции за предыдущий месяц, достаточно записать уравнение $B=C-A$. Особенностью операций сложения и вычитания матриц является то, что они должны иметь одинаковое количество строк и столбцов. Операция сложения матриц коммутативна (результат сложения не зависит от перестановки матриц местами).

Предположим, что объём продаж трёх видов продукции предприятия составляет $58, 26, 8$ единиц по ценам соответственно $1, 2, 3$ руб. за единицу. Общий доход от продаж будет составлять

$58 \times 1 + 26 \times 2 + 8 \times 3 = 134$ руб. Представим данные о продажах в матричной форме (в виде вектора-строки):

$$a = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (П1.2)$$

а соответствующие цены другой матрицей (в виде вектора-столбца):

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (П1.3)$$

Тогда общий доход от продажи трёх видов продукции, равный 134 руб., представляет собой сумму произведений элементов вектора-строки a на соответствующие элементы вектора-столбца b. Математически эта операция записывается следующим образом:

$$ab = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 58 \times 1 + 26 \times 2 + 8 \times 3 = 134 . \qquad (П1.4)$$

Существует обязательное ограничение – количество элементов вектора-строки должно быть равно количеству элементов вектора-столбца.

Рассмотрим пример, когда предприятие осуществляет реализацию по разной стоимости трех типов продукции в розничной сети отечественным и зарубежным фирмам (т.е. предприятие имеет три отдела). Данные о реализации продукции сведены в табл. П.1.3.

Таблица П.1.3

Данные о реализации продукции

Отделы	Типы продукции и цена ее единицы		
	Карандаши (5 руб.)	Пуговицы (6 руб.)	Спички (2 руб.)
Отдел 1 (розничная продажа)	58	26	8
Отдел 2 (оптовые поставки отечественным фирмам)	52	58	12
Отдел 3 (оптовые поставки зарубежным фирмам)	1	3	9

Рассмотрим задачу определения дохода по каждому отделу. Используя логику предыдущего примера, можно записать итоговый доход по каждому отделу, умножая количество реализованной продукции на ее стоимость и затем суммируя результаты вычислений. Однако нас интересует математическое уравнение в векторно-матричной форме, из которого можно вычислить доход каждого отдела. Обозначим матрицу продаж матрицей A:

$$A = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}. \qquad (П1.5)$$

Сформируем также матрицу цен, элементами в которой будут цены для каждого типа продукции. Эту матрицу обозначим x, которая в данном примере имеет один столбец и три строки, т.е., $x_{11} = 5, x_{21} = 6, x_{31} = 2$ $x_{11} = 5$, $x_{21} = 6$, $x_{31} = 2$. Такая матрица называется *вектором – столбцом,* или просто *вектором*. Поскольку второй индекс в обозначениях элементов не изменяется, то его обычно не используют. Вектор x записывается следующим образом:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (П1.6)$$

Аналогично, как и в скалярном варианте умножения, когда записывается $a_{11}\ x_1$, векторно-матричный вариант умножения записывается уравнением

$$Ax = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (П1.7)$$

Результатом вычислений являются значения элементов матрицы, записанной справа от знака равенства. Операция умножения матрицы на матрицу осуществляется следующим образом: соответствующие элементы строки матрицы, расположенной слева, умножаются на соответствующие элементы столбца матрицы, расположенной справа от этой матрицы, далее эти произведения суммируются и результат является элементом с индексом «11» итоговой матрицы, записанной справа от знака равенства. Для получения остальных элементов в строке итоговой матрицы необходимо повторить данную операцию, фиксируя индекс строки матрицы, расположенной слева, и изменяя индекс столбца матрицы, расположенной справа. Таким образом, вычисляются все элементы первой строки итоговой матрицы (с индексами «1*j*»). Для вычисления элементов в других строках итоговой матрицы изменяется индекс строки матрицы, расположенной слева, и повторяется данная операция, т.е. определяются элементы с индексом «*ij*» итоговой матрицы. В данном примере итоговой матрицей является 3-х мерный вектор.

Произведение матрицы на матрицу возможно только в том случае, когда число элементов в строках матрицы, расположенной слева, равно числу элементов матрицы, расположенной справа. Матрицей также могут быть данные, символы, расположенные в строку. Такая матрица называется *вектор-строкой*, и она связана с вектором-столбцом определенным преобразованием. Это преобразование называется *операцией транспонирования* – взаимная перестановка строк и столбцов. При этом соответствующие индексы у элементов матрицы меняются местами. Символом транспонирования является «*T*», т.е. b – вектор – столбец, или просто вектор; b^T – вектор-строка (другие определения не используются).

Примечание. Анализ уравнения для этого примера показывает, что произведение матрицы на вектор является вектором (матрица расположена слева, вектор - справа и итогом является вектор). Произведение матрицы на матрицу является только матрицей, и операция умножения в общем случае не коммутативна (нельзя переставлять матрицы друг с другом $AB \neq BA$).

П.1.2. Решения матричных алгебраических уравнений

Как известно, произведение матрицы на вектор является только вектором. Обозначим этот вектор символом y. Тогда в общей форме можем записать

$$y = Ax \text{, или } Ax = y. \tag{П1.8}$$

Из самого определения операции умножения следует, что каждый элемент произведения есть сумма элементов вектора x, каждый из которых умножен на соответствующий элемент матрицы A. Например,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{П1.9}$$

можно записать в виде двух скалярных уравнений

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \qquad (П1.10)$$

Таким образом, элемент y_1 равен взвешенной сумме элементов x с весами, равными элементам a_{11}, a_{12}, a_{13} первой строки матрицы A. Такая взвешенная сумма называется *линейной комбинацией элементов* x, поскольку элементы x не имеют иной степени, кроме первой, и нет составляющих, содержащих более одного элемента вектора x. Следовательно, в произведении $y = Ax$ элементы y являются линейными комбинациями элементов x, т.е. вектор x преобразуется в вектор y с помощью умножения на матрицу A или матрица A осуществляет линейное преобразование x в y. Необходимость в линейном преобразовании одного ряда переменных в другой возникает в различных задачах.

Пример 1

Фирма производит автомобили, и имеются данные, характеризующие число деталей, необходимых для изготовления трёх типов автомобилей (табл. П.1.4).

Таблица П.1.4

Соотношение деталей и типов автомобилей

Наименование детали	Тип автомобиля		
	1	2	3
Колесо	4	6	8
Ось	2	2	3
Корпус	1	1	1

Принимаем следующие обозначения:
x_i - количество автомобилей $(i = 1, 2, 3)$; y_j - количество деталей $(j = 1, 2, 3)$. Тогда можно записать следующие уравнения:

$$y_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3,$$

$$y_2 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3, \qquad (П1.11)$$

$$y_3 = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3.$$

Данные уравнения целесообразно записать в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ или } \quad y = Ax. \qquad (\text{П}1.12)$$

Таким образом, вектор значений количества автомобилей преобразован матрицей A в вектор значений количества необходимых деталей.

Пример 2

Продолжим пример 1 и рассмотрим потребности в материалах (пластмассе и стали) при производстве каждой из деталей. Данные о потребности в материалах приведены в табл. П.1.5.

Таблица П.1.5

Соотношение материалов и типов деталей

Материал	Тип детали		
	1	2	3
Пластмасса	0.5	0	3
Сталь	0	1	1

Дополнительно к обозначениям примера 1 принимаем, что m_k - количество материала типа $k \left(k = 1, 2\right)$, необходимого для изготовления y_1 колёс, y_2 осей, y_3 корпусов. Тогда можно записать следующее скалярные уравнения:

$$m_1 = 0.5y_1 + 0y_2 + 3y_3. \qquad (\text{П}1.13)$$

В векторно-матричной форме данная система уравнений примет вид

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ или } \quad m = By. \qquad (\text{П}1.14)$$

После подстановки уравнения $y = Ax$ в уравнение $m = By$ можно записать следующее уравнение

$$m = BAx. \qquad (\text{П } 1.15)$$

Это уравнение связывает количество типов автомобилей и количество материалов, которые необходимы для производства автомобилей.

После матричного умножения BA последнее уравнение будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ или } \quad m = Cx, \tag{П1.16}$$

где $C = BA$.

Очевидно, что трудоёмкость матричного преобразования матриц большой размерности значительно меньше, чем трудоёмкость решения эквивалентной системы скалярных уравнений с использованием простой подстановки переменных.

П.1.3. Определение обратной матрицы

Обратная матрица используется при выполнении операций деления в матричных уравнениях. Операция деления на матрицу заменяется операцией умножения на матрицу A^{-1}, обратную к матрице A. Здесь наблюдается аналогия со скалярным случаем. Например, необходимо решить скалярное уравнение

$$ax = c, \tag{П1.17}$$

где a, c – известные числа и a не равно нулю. Для определения неизвестного числа x требуется умножить правую и левую части уравнения на $(1/a) = a^{-1}$. Обобщение такой задачи для нескольких неизвестных предполагает решение системы совместных уравнений. При этом используется прием подстановки переменных. Такой приём хорошо используется при решении простых уравнений с небольшим количеством неизвестных переменных. В случае, когда имеется большое количество уравнений и неизвестных, целесообразно использовать векторно-матричную форму записи уравнений с последующим решением такого уравнения, применяя обратную матрицу. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3

Предположим, что кривая спроса на автомобили для некоторого периода времени представлена уравнением

$$x_1 = 12000 - 0.2x_2, \tag{П 1.18}$$

где x_1– цена автомобиля, x_2 - количество автомобилей.

При этом кривая предложения имеет следующий вид

$$x_1 = 300 + 0.1x_2 . \tag{П 1.19}$$

Для определения цены равновесия можно использовать два подхода. Первый – использовать приём подстановки. Второй – с использованием обратной матрицы. Решение задачи по первому подходу очевидно, и мы его рассматривать не будем. При использовании второго подхода исходные уравнения необходимо записать в векторно-матричной форме типа

$$Ax = b , \tag{П 1.20}$$

где A – матрица, а b – вектор с известными элементами. Данное уравнение решается относительно x следующим образом. Умножаем правую и левую части уравнения (П1.20) на обратную матрицу A^{-1}. В результате получим:

$$x = A^{-1}b . \tag{П 1.21}$$

Такая форма решения применима вне зависимости от того, решаем ли мы два уравнения с двумя неизвестными или двести уравнений с двумястами неизвестными. Далее, систему уравнений для рассматриваемого примера запишем в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{П 1.22}$$

Следовательно, матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}. \tag{П 1.23}$$

Процедуру вычисления обратной матрицы A^{-1} рассмотрим далее, а для данного примера запишем

$$A^{-1} = -0.33 \begin{bmatrix} -1 & -0.2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}. \tag{П 1.24}$$

После умножения на A^{-1} исходное векторно-матричное уравнение примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4200 \\ 39000 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4200 \\ 39000 \end{bmatrix}. \tag{П 1.25}$$

Это означает, что решение имеет вид

$$x_1 = 4200, x_2 = 39000 . \tag{П 1.26}$$

В процессе вычислений можно установить, что результатом произведения матриц $\left(A\,A^{-1}\right)$ является единичная матрица I, т.е. $\left(A\,A^{-1}\right)=I$.

П.1.4. Алгоритм вычисления обратной матрицы

Известно, что определитель матрицы A с элементами a_{ij} при $i,\, j=1,\dots\dots n$ записывается в виде следующей суммы:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\left[M_{ij}\right] \quad \text{при} \quad i=1,\dots\dots n, \qquad (\text{П } 1.27)$$

где a_{ij} – элементы матрицы A; $[M_{ij}]$ - минор элемента a_{ij}, равный определителю, полученному из $|A|$ путём вычеркивания i–й строки и j–го столбца. Произведение $(-1)^{i+j}\left[M_{ij}\right]$ называют *алгебраическим дополнением* (или знаковым минором) a_{ij}. Обозначим через μ_{ij} алгебраическое дополнение a_{ij}:

$$\mu_{ij}=(-1)^{i+j}\left[M_{ij}\right]. \qquad (\text{П } 1.28)$$

Рассмотрим пример, в котором будем использовать матрицу A из предыдущей задачи:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ 10 & -1\end{bmatrix}. \qquad (\text{П } 1.29)$$

Определитель такой матрицы равен $[A]=-1-2=-3$, а алгебраические дополнения элементов имеют вид

$$\mu_{11}=(-1)^{1+1}(-1)=-1, \qquad \mu_{12}=(-1)^{1+2}(10)=-10,$$

$$\mu_{21}=(-1)^{2+1}(0.2)=-0.2, \qquad \mu_{22}=(-1)^{2+2}(1)=1. \qquad (\text{П } 1.30)$$

Далее, рассмотрим матрицу D, составленную из алгебраических дополнений (матрица алгебраических дополнений), и матрицу P, полученную в результате её транспонирования. Матрица P называется *присоединенной матрицей*:

$$D=\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -10\\ -0.2 & 1\end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{21}\\ \mu_{12} & \mu_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -0.2\\ -10 & 1\end{bmatrix}.$$

Произведение присоединенной матрицы P на исходную матрицу A будет равно

$$C=\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{21}\\ \mu_{12} & \mu_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -0.2\\ -10 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ 10 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Анализ произведения (PA) позволяет заключить, что в результате получим диагональную матрицу с элементами, равными определителю $[A]$ матрицы A, т.е. матрица C равна

$$C=\begin{bmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{bmatrix}. \qquad (\text{П } 1.31)$$

Разделим данную матрицу на скаляр – определитель$[A]$ (или умножим на скаляр $(1/|A|)$) и получим единичную матрицу I. Следовательно, можно записать

$$(1/|A|)PA=(1/|A|)C=(1/|A|)\begin{bmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{bmatrix}=I. \qquad (\text{П } 1.32)$$

Известно, что для квадратных матриц в большинстве случаев выполняется равенство$\left(AA^{-1}\right)=I$, поэтому на основании последнего уравнения можно записать

$$A^{-1}=(1/|A|)\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{21}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{bmatrix}=(1/|A|),$$

$$\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{bmatrix}^T=(1/|A|)P=(1/|A|)D^T\ . \qquad (\text{П } 1.33)$$

Таким образом, для рассматриваемого примера обратная матрица равна

$$A^{-1}=-0.33\begin{bmatrix}-1 & -0.2\\ -10 & 1\end{bmatrix}. \qquad (\text{П } 1.34)$$

Запишем определение обратной матрицы. Обратная матрица – это матрица, полученная путем замены каждого элемента исходной матрицы на соответствующее алгебраическое дополнение, транспонированием полученной матрицы и умножением на обратную величину определителя исходной матрицы. Обязательное условие существования обратной матрицы – неравенство нулю определителя исходной матрицы (операция деления на нуль запрещена). Алгоритм получения обратной матрицы:

- вычисляется определитель исходной матрицы и матрица её алгебраических дополнений;
- формируется присоединенная матрица в результате транспонирования вычисленной матрицы алгебраических дополнений;
- вычисляется обратная матрица по отношению к исходной матрице путем деления присоединенной матрицы на определитель исходной матрицы (определитель матрицы является скаляром).

П.1.5. Алгоритм вычисления коэффициентов характеристического уравнения на основе элементов матрицы (алгоритм Бохера)

Характеристическое уравнение записывается в виде полинома по степеням символа собственного значения матрицы. В результате решения этого уравнения определяются корни характеристического уравнения или собственные значения матрицы. Алгоритм Бохера позволяет вычислить коэффициенты характеристического уравнения на основе значений элементов матрицы.

Некоторые свойства матриц

Сумма n диагональных элементов матрицы A называется *следом матрицы.*

Сумма n собственных значений матрицы A равна сумме n диагональных элементов этой матрицы. Произведение n собственных значений матрицы A равно определителю этой матрицы.

Допустим, мы имеем собственные значения $\lambda_1, \dots \lambda_n$ и собственные векторы z матрицы A. Тогда собственные значения матрицы A^2 равны $\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2$ и каждый собственный вектор матрицы A является также и собственным вектором для матрицы A^2. Доказательством этого утверждения является следующее. Умножим правую и левую части уравнения $Az = \lambda z$ на A и запишем

$$A^2 z = A\lambda z = \lambda Az = \lambda^2 z, \qquad (\text{П } 1.35)$$

т.е.

$$A^2 z = \lambda^2 z. \qquad (\text{П } 1.36)$$

Из последнего уравнения следует, что λ^2 является собственным значением для A^2 с тем же собственным вектором z.

Это рассуждение теряет силу, когда имеются две различные матрицы A и B, для которых определены собственные значения λ и μ.

Во-первых, $\lambda\mu$ не являются собственным значением матрицы (AB); во-вторых, матрицы A и B не имеют один и тот же собственный вектор. Например, для матрицы A характеристический многочлен может быть записан в следующей форме:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad \text{(П 1.37)}$$

Обозначим след матрицы A^k (матрица A^k – это произведение матрицы A с числом множителей, равным k; след матрицы – сумма диагональных элементов матрицы A):

$$tr\ A^k = T_k. \qquad \text{(П 1.38)}$$

Тогда алгоритм вычисления коэффициентов уравнения $a_1, \ldots\ldots, a_n$ представляет собой систему рекуррентных уравнений

$$a_1 = -T_1,$$

$$a_2 = -(2)^{-1}(a_1T_1 + T_2),$$

$$a_3 = -(3)^{-1}(a_2T_1 + a_1T_2 + T_3), \qquad \text{(П 1.39)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = -(n)^{-1}(a_{n-1}T_1 + a_{n-2}T_2 + \ldots\ldots + a_1T_{n-1} + T_n).$$

П.1.6. Преобразование матрицы в диагональную форму

Преобразование матрицы в диагональную форму позволяет значительно сократить объём последующих вычислений вследствие равенства нулю всех элементов матрицы, кроме диагональных элементов. При этом предполагается, что процедура преобразования не изменяет собственные значения матрицы. Допустим, что матрица A размерности nxn имеет n линейно независимых собственных векторов. Тогда, если сформировать соответствующую матрицу S, столбцами которой являются собственные векторы то матрица $\left(S^{-1}AS\right)$ будет диагональной матрицей Λ. Диагональные элементы этой матрицы будут равны собственным значениям матрицы A:

$$S^{-1}AS = \Lambda. \qquad \text{(П 1.40)}$$

Доказательство данного равенства следует из уравнения $Az = \lambda\ z$. Матрица(AS) равна следующему выражению

$$AS = [z_1]z_2[....]z_n = [\lambda_1 z_1]\lambda_2 z_2[\lambda_2 z_2]...[\lambda_n z_n], \qquad (\text{П } 1.41)$$

где $z_1\ z_2,...\ z_n$ – собственные векторы. Правую матрицу данного уравнения можно представить в виде произведения матриц, одна из которых диагональная. Элементы этой диагональной матрицы равны собственным значениям:

$$[\lambda_1 z_1][\lambda_2 zz_2]...[\lambda_n z_n] = [z_1][z_2]...[z_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (\text{П}1.42)$$

Следовательно, можно записать

$$AS = S\Lambda\text{, или } S^{-1}AS = \Lambda\text{, или } A = S\Lambda S^{-1} \qquad (\text{П } 1.43)$$

Матрица S будет иметь обратную матрицу S^{-1}, поскольку её столбцы (собственные векторы матрицы A) предполагались линейно независимыми.

В заключение отметим, что любая квадратная матрица с различными собственными значениями может быть приведена к диагональному виду.

П.1.7. Пример вычисления модальной матрицы

Пусть задана матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (\text{П } 1.44)$$

Характеристическое уравнение этой матрицы и характеристический многочлен равны

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} (\lambda-2) & 2 & -3 \\ -1 & (\lambda-1) & -1 \\ -1 & -3 & (\lambda+1) \end{bmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0. \quad (\Pi\ 1.45)$$

Корни характеристического многочлена (характеристические числа) равны

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -2;\ \lambda_3 = 3. \quad (\Pi\ 1.46)$$

Присоединенная матрица B^* для матрицы $B = [\lambda I = A]$ будет равна

$$B^* = \begin{bmatrix} (\lambda^2-4) & (-2\lambda+7) & (3\lambda-5) \\ (\lambda+2) & (\lambda^2-\lambda-5) & (\lambda+1) \\ (\lambda+2) & (\lambda^2-\lambda-5) & (\lambda+1) \end{bmatrix}. \quad (\Pi\ 1.47)$$

Следующий этап заключается в вычислении присоединенной матрицы для всех характеристических чисел:

$$\text{при } \lambda_1 = 1 \qquad \text{при } \lambda_2 = -2 \qquad \text{при } \lambda_3 = 3 \quad (\Pi\ 1.48)$$

$$B_1^* = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix};\ B_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix};\ B_3^* = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

В результате модальная матрица (матрица, составленная из собственных векторов) будет равна

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\Pi\ 1.49)$$

Первый столбец модальной матрицы S формируется из первого столбца матрицы B_1^*, все элементы которого делятся на общий множитель (3), второй столбец матрицы S – из второго столбца матрицы B_2^*, третий столбец матрицы S – из третьего столбца матрицы, B_1^*, все элементы которого делятся на общий множитель, равный 4.

Вычисление модальной матрицы осуществляется не только для получения собственных векторов исходной матрицы A, а также для её диагонализации (вычисления диагональной матрицы):

$$\Lambda = S^{-1} A S . \tag{П 1.50}$$

Для данного примера соответствующие матрицы равны

$$S^{-1} = (30)^{-1} \begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \tag{П 1.51}$$

Приложение 2

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАПИСАННЫХ В ФОРМЕ КОШИ

Что представляют собой собственные значения и для чего они служат? Одно из применений собственных значений связано с решением системы обыкновенных скалярных дифференциальных уравнений (уравнений в форме Коши). Система таких уравнений обычно записывается в векторно-матричной форме. При этом не нужно быть математиком или специалистом в области дифференциального исчисления, а достаточно уметь дифференцировать функции типа $x^n, \sin^x, e^x$.

П.2.1. Решение скалярного дифференциального уравнения

Прежде чем рассматривать вычислительные алгоритмы матричных дифференциальных уравнений решим достаточно простую задачу. Очевидно, что производственный процесс с неограниченными запасами сырья и оборудования, трудовыми и финансовыми ресурсами может быть представлен скалярным дифференциальным уравнением вида

$$x(t) = ax(t). \qquad (\text{П } 2.1)$$

Предполагается, что при начальном состоянии $t = t_0$ $x\,(t = t_0) = x_0$ (возможен частный случай $t_0 = 0$). В данном уравнении приняты следующие обозначения: $x(t)$– выпуск продукции в единицу времени (интенсивность производства); a – некоторый параметр, значения которого могут быть действительными и комплексными (присутствует вещественная и мнимая части) числами. В данном случае размерность параметра a равна 1/сек.

Замечание. Этап записи уравнений математической модели должен завершаться проверкой размерностей слагаемых справа и слева от знака равенства.

Решение такого уравнения осуществляется следующим образом. Записывается исходное уравнение в виде

$$\frac{d\,x(t)}{x(t)} = a\,d\,t. \qquad (\text{П } 2.2)$$

Интегрируем правую часть уравнения в пределах от x_0 до $x_N(t)$ (при этом полагаем, что $x_N(t) \neq 0$), а левую часть – от $t_0 = 0$ $t_0 = 0$ до t. В результате запишем

$$\ln x(t) \Big|_{x_0}^{x_N(t)} = a\,t \Big|_{0}^{t}; \qquad (\text{П } 2.3)$$

$\ln x(t) - \ln x_0 = a\,t - 0$ или, $\ln\left(x(t)/x_0\right) = a\,t$ или $\left(x(t)/x_0\right) = e^{a\,t}$.

Окончательно решение исходного уравнения записывается в виде

$$x(t) = x_0\, e^{a\,t}. \qquad (\text{П } 2.4)$$

Поведение $x(t)$ в данном уравнении зависит от значений и знака параметра а. Допустим, имеем действительное число, которое может быть равно нулю, больше или меньше нуля.

1. $a = 0$; $x(t) = x_0$. С точки зрения развития или устойчивости процессы протекают с нулевой скоростью.

2. $a > 0$. $x(t) = x_0 e^{a\,t}$. Происходит возрастание $x(t)$ по экспоненте из заданного начального состояния x_0. Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является неустойчивым:

$$x(t) \to \infty \text{ при } t \to \infty. \qquad (\text{П } 2.5)$$

3. $a > 0$. $x(t) = x_0 e^{-at}$. Происходит уменьшение (снижение) $x(t)$ по экспоненте из заданного начального состояния. Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является устойчивым: $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В экономике существуют и другие формы процессов, в частности колебательные. Например, изменение курсов валют, стоимости акций и т.д. Такие процессы включают, как минимум, две составляющие –

гармоническую составляющую и экспоненциальную. Причём параметры гармонической составляющей обычно неизвестны.

Рассмотрим вариант, когда параметр a является комплексным числом, т.е. $a = \alpha \pm j\beta$. Решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha \pm j\beta)t} = x_0 e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t}. \qquad (\text{П } 2.6)$$

При этом вещественное значение α может быть равно, больше или меньше нуля и определяет скорость изменения экспоненциальной составляющей $x(t)$. Мнимая часть $(\pm j\beta)$ определяет осциллирующую (переменную) составляющую

$$e^{\pm j\beta t} = \cos \beta t \pm j \sin \beta t. \qquad (\text{П } 2.7)$$

Более сложные задачи в математическом отношении возникают при решении векторно-матричных уравнений, описывающих взаимосвязанные экономические объекты или системы.

П.2.2. Решение системы двух дифференциальных уравнений

Рассмотрим модель взаимосвязанных производственных процессов в виде двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = 4\, x_1(t) - 5\, x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 2\, x_1(t) - 3\, x_2(t), \qquad (\text{П } 2.8)$$

где $x_1(t)$ – скорость изменения объёма запасов материальных ресурсов, необходимых для выпуска продукции; $x_2(t)$ – объём выпуска продукции в единицу времени (интенсивность производства). Заданы начальные условия для уравнений в момент времени $t = 0$:

$$x_1(t = 0) = x_{10} = 8;\ x_2(t = 0) = x_{20} = 5. \qquad (\text{П } 2.9)$$

В векторно-матричной форме данная система уравнений записывается в виде

$$x(t) = A\, x(t;), \qquad x(t = 0) = x_0, \qquad (\text{П } 2.10)$$

где $$x^T(t) = [x_1(t), x_2(t)];\ x_0^T = [x_{10}, x_{20}] = [8, 5]; \qquad (\text{П } 2.11)$$
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (П 2.10) имеет первый порядок, поскольку производные более высокого порядка отсутствуют, и оно является линейным относительно искомой функции.

Анализируя исходные данные, заключаем, что решение задано лишь в момент времени $t = 0$. Необходимо определить решение в любой другой момент времени. При этом необходимо учитывать, что решение векторно-матричного уравнения изменяется во времени от заданных начальных значений. По аналогии с решением скалярного уравнения решение векторно-матричного уравнения будет определяться экспоненциальной зависимостью (так как это система скалярных уравнений). Поскольку $x(t)$ является вектором, то решение в общем виде может быть записано как

$$x(t) = e^{\lambda t} z. \qquad (\text{П } 2.12)$$

Обязательным условием является следующее: при решении всех скалярных уравнений, входящих в векторно-матричное уравнение, показатель λ один и тот же (т.е. одно и то же значение λ одновременно для всех уравнений). Таким образом, множитель $e^{\lambda t}$ будет являться общим для всех уравнений. Подставляя $e^{\lambda t} z$ в векторно-матричное уравнение, записываем равенство

$$\lambda e^{\lambda t} z = A e^{\lambda t} z. \qquad (\text{П } 2.13)$$

Сокращая множитель $e^{\lambda t}$, записываем основное уравнение относительно значения λ и вектора z

$$\lambda z = A z. \qquad (\text{П}2.14)$$

Параметр λ называется *собственным значением* (характеристическим числом), а вектор z – *собственным вектором* (обозначение вектора может быть произвольным). Данное уравнение является нелинейным, поскольку оно содержит произведение неизвестных λ и z.

В том случае, когда мы знаем число λ, то уравнение относительно z становится линейным и можно записать

$$(A-\lambda I)z=0. \qquad (П\ 2.15)$$

Очевидно, что собственный вектор z находится в нулевом пространстве матрицы $(A-\lambda I)$, которая для данного примера имеет вид

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{bmatrix}. \qquad (П\ 2.16)$$

Причём интерес представляет только те значения λ, для которых имеется ненулевой собственный вектор z. Запишем ключевое определение собственного значения матрицы: *число λ является собственным значением матрицы A с соответствующим ненулевым собственным вектором тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение для матрицы A* $\det(A-\lambda I)=0$.

Характеристическое уравнение может быть записано в виде характеристического полинома – алгебраического уравнения, содержащего в качестве слагаемых элементы с параметром λ в степени от 0 до n. Максимальное значение степени λ определяется порядком матрицы. В результате решения такого уравнения определяются собственные значения матрицы.

Для рассмотренного примера характеристический полином

$$\det\begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2. \qquad (П\ 2.17)$$

Таким образом, данная матрица A имеет два различных собственных значения: $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$. Каждому из этих значений соответствует пространство собственных векторов, удовлетворяющих уравнению $\lambda z=Az$. (П 2.18)

Вычислим собственные векторы для каждого λ_1, λ_2.

$$\lambda_1=-1.\ (A-\lambda_1 I)z=\begin{bmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{bmatrix}\ z=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \qquad (П2.19)$$

Решением этого уравнения является любой вектор, кратный

$$z_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad (П\ 2.20)$$

$$\lambda_1 = 2.$$

$$\left(A - \lambda_2 I\right) z = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (П\ 2.21)$$

Решением этого уравнения является любой вектор, кратный

$$z_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (П\ 2.22)$$

Возвратимся к дифференциальному уравнению $x(t) = e^{\lambda t} z$. Соответственно для пар (λ_1, z_1) и (λ_2, z_2) можно записать два решения в виде экспоненты (частные решения, при которых не выполняются начальные условия)

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} z_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad x(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (П\ 2.23)$$

Кроме того, каждое из этих решений не может быть однозначным решением вследствие множества собственных векторов, кратных z_1 и z_2.

Поскольку исходное уравнение является линейным и однородным, оно допускает суперпозицию данных решений, т.е. любая комбинация двух его частных решений вновь будет его решением (более общим решением):

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} z_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} z_2. \qquad (П\ 2.24)$$

В данное уравнение входят два произвольных параметра (c_1 и c_2). Очевидно, что при их выборе должны удовлетворяться начальные условия x_0 при $t = 0$, т.е.

$$x_0 = c_1 z_1 + c_2 z_2 \qquad (П\ 2.25)$$

или
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{П2.26}$$

Уравнения (П 2.25) и (П 2.26) позволяют получить $c_1 = 3$ и $c_2 = 1$ и записать результирующее решение исходного векторно-матричного уравнения (исходной системы уравнений):

$$x(t) = 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{П2.27}$$

Запишем отдельно каждую компоненту вектора $x(t)$:

$$x_1(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}; \tag{П2.28}$$

$$x_2(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t}.$$

Начальные условия по данным уравнениям проверяются достаточно просто, путём подстановки $t = 0$.

Собственные векторы и собственные значения используются не только для определения решения дифференциального уравнения. Они приобретают особую важность при оценке свойств экономической системы, представленной математической моделью в виде векторно-матричного дифференциального уравнения. К свойствам экономической системы можно отнести, например, устойчивость протекающих в них процессов или выявление определённых колебаний рынка для получения максимальной прибыли. Собственные значения и собственные векторы появляются естественно и автоматически при решении дифференциального линейного уравнения вида

$$x(t) = Ax(t). \tag{П2.29}$$

Такое уравнение имеет частное экспоненциальное решение, в котором собственное значение дает скорость, с которой растёт или убывает собственный вектор. Другие решения будут комбинациями этих частных решений, составленными таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия. Основным уравнением для получения такого решения является $\lambda z = Az$. Однако большая часть векторов z не будет удовлетворять такому уравнению, независимо от того, является ли λ собственным значением или нет. Обычно вектор z меняет направление после умножения на A, так что вектор Az в большинстве случаев не будет кратным z. *Это означает,* *что только специальные числа λ являются собственными значениями и только специальные векторы являются собственными векторами.* Разумеется, если A кратна единичной матрице, то ни один из векторов не будет изменять своего направления и все они будут собственными. Но в обычном случае собственных векторов мало и они направлены в разные стороны. В теории управления используется следующее объяснение применимости собственных векторов: собственные векторы сравниваются с «гармониками» (модами) системы уравнений (или системы управления, которая записывается этими уравнениями). Поскольку собственные векторы независимы друг от друга, можно наблюдать поведение каждого вектора в отдельности, а затем комбинировать эти «гармоники» для отыскания итогового решения, удовлетворяющего некоторым граничным условиям (обычно начальным условиям). Используя специально сконструированную матрицу из собственных векторов – модальную матрицу, можно диагонализировать исходную матрицу. Этот приём широко используется в различных экономических и технических задачах. Запишем условия, при которых параметр λ будет собственным значением для матрицы A:

1. Существует ненулевой вектор, обеспечивающий равенство $Az = \lambda z$; матрица $(A - \lambda I)$ вырождена. Для определения вырожденности матрицы вычисляется ее определитель. Этот определитель есть многочлен от λ степени n, называемый характеристическим многочленом матрицы A. Уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ есть характеристическое уравнение, и его корни $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (которые могут быть, а могут и не быть вещественными числами и среди которых могут оказаться или не оказаться совпадающие корни) являются собственными значениями матрицы A.

2. Характеристический полином $\det(A - \lambda I) = 0$.

При небольшой размерности матрицы, для которой вычисляются собственные значения, записать характеристический многочлен не представляет трудности. В случае большого порядка матрицы А для записи характеристического многочлена используется алгоритм Бохера.

П.2.3. Общее решение дифференциальных матричных уравнений

При исследовании многомерных процессов в экономических системах математические модели обычно записываются в виде векторно-матричных уравнений и целесообразно использовать теорию матриц.

Аналогично, как и в скалярном случае, решение однородного матричного дифференциального уравнения записывается в виде матричной экспоненты. Например, $x(t) = Ax(t)$ с начальными условиями при $t = 0,\ x(t = 0) = x_0$, где $x(t) - n$ - мерный вектор; $A - n \times n$ матрица. Очевидно, что решение этого уравнения можно записать в виде

$$x(t) = \left(e^{At}\right)x_0. \tag{П2.30}$$

Одним из вариантов приближенного решения этого уравнения является разложение e^{At} в ряд

$$e^{At} = I + At + (2!)^{-1}(At)^2 + \dots\ . \tag{П2.31}$$

Рассмотрим вариант более точного решения на примере. Допустим матрица A равна

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{П2.32}$$

Прежде всего мы определим собственные значения λ_1, λ_2 и собственные векторы z_1, z_2 и запишем:

$$Az_1 = \lambda_1 z_1 = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ ; \tag{П2.33}$$

$$Az_2 = \lambda_2 z_2 = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{П2.34}$$

Наилучший способ – это записать общее решение и согласовать его с начальными условиями:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} z_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} z_2 = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \tag{П2.35}$$

$$x_0 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = s\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{П2.36}$$

где матрица S составлена из собственных векторов z_1 и z_2.

Из последнего уравнения можно записать вектор (из коэффициентов c_1, c_2 :)

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = S^{-1} x_0 . \qquad (П2.37)$$

Тогда в матричной форме общее решение $x(t)$ записывается

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} S^{-1} x_0 = S e^{\Lambda t} S^{-1} x_0 .$$

(П2.38)

В результате основной формулой для решения векторно-матричного однородного дифференциального уравнения будет следующее уравнение:

$$x(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} x_0 . \qquad (П2.39)$$

В итоге имеем разные уравнения, позволяющие решить исходное дифференциальное уравнение. Докажем равенство правых частей данного уравнения и уравнения

$$x(t) = e^{At} x_0 \qquad (П2.40)$$

Т.е. необходимо доказать равенство

$$S e^{\Lambda t} S^{-1} = e^{At} . \qquad (П2.41)$$

Рассмотрим первоначально матричный экспотенциал и его разложение в ряд

$$e^{At} = I + At + (2!)^{-1} (At)^2 + \ldots \; . \qquad (П2.42)$$

Производная матричного экспоненциала равна

$$\frac{de^{At}}{dt} = A\left(I + At + (2!)^{-1} (At)^2 + \ldots\right) = Ae^{At} . \qquad (П2.43)$$

Таким образом, подтверждается, что выражение $\left(e^{At}x_0\right)$ является решением дифференциального уравнения при условии $t = 0 \times \left(t = 0\right) = x_0$ и оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{de^{A\,t}x_0}{dt} = Ae^{A\,t}x_0 \tag{П2.44}$$

(в левой части уравнения – производная от матричной экспоненты равна $Ae^{A\,t}$ и в правой – производная от бесконечного ряда равна тому же выражению).

В соответствии с известным уравнением $A = S\Lambda S^{-1}$ можно записать

$$A^k = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\ldots\left(S\Lambda S^{-1}\right) = S\Lambda^k S^{-1}. \tag{П2.45}$$

Поэтому бесконечный ряд для матричной экспоненты принимает вид (с учётом равенства $I = SS^{-1}$)

$$e^{A\,t} = I + S\Lambda S-^1 t + (2!)^{-1}S\Lambda^2 S^{-1}t^2 + \ldots S\left(I + \Lambda t + (2!)^{-1}\Lambda^2 t^2 + \ldots\right)S^{-1} = Se^{\Lambda\,t}S^{-1}. \tag{П2.46}$$

Окончательно можно сделать следующее заключение: если матрица A приводится к диагональному виду $A = S\Lambda S^{-1}$, то дифференциальное уравнение $d\,x/dt = Ax$ имеет решение

$$x(t) = e^{A\,t} \quad x_0 = Se^{\Lambda\,t}S^{-1}x_0. \tag{П2.47}$$

Столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы A, так что

$$x(t) = [z_1][z_2]..[z_n]\begin{bmatrix} e^{\lambda 1t} & & & \\ & e^{\lambda 1t} & & \\ & & e^{\lambda n-1t} & \\ & & & e^{\lambda nt} \end{bmatrix} \tag{П2.48}$$

$$S^{-1}x_0 = c_1 e^{\lambda 1t}z_1 + e^{\lambda 2t}z_2 + \ldots c_n e^{nt}z_n.$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений $\left(e^{\lambda i t} c_i\right)$, где коэффициенты c_i, удовлетворяющие начальному условию x_0, равны

$$c = S^{-1} x_{0.}). \tag{П 2.49}$$

Приложение 3

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ТЕРРИТОРИИ АДМИНИСТРАТИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

1. Формирование моделей объектов и типов управляющих воздействий.

2. Обоснование и выбор инструментальной базы для исследований и практического использования в управленческих структурах.

3. Определение качественных показателей объектов хозяйственной деятельности и деятельности управленческих структур.

4. Построение законов оптимального управления объектами при хаотическом изменении параметров рыночных отношений.

5. Моделирование алгоритмов управления объектами разных форм собственности.

6. Определение алгоритмов оптимального управления объектами в реальном масштабе времени.

7. Оценка эффективности принятия решений управленческими структурами на определенном интервале времени.

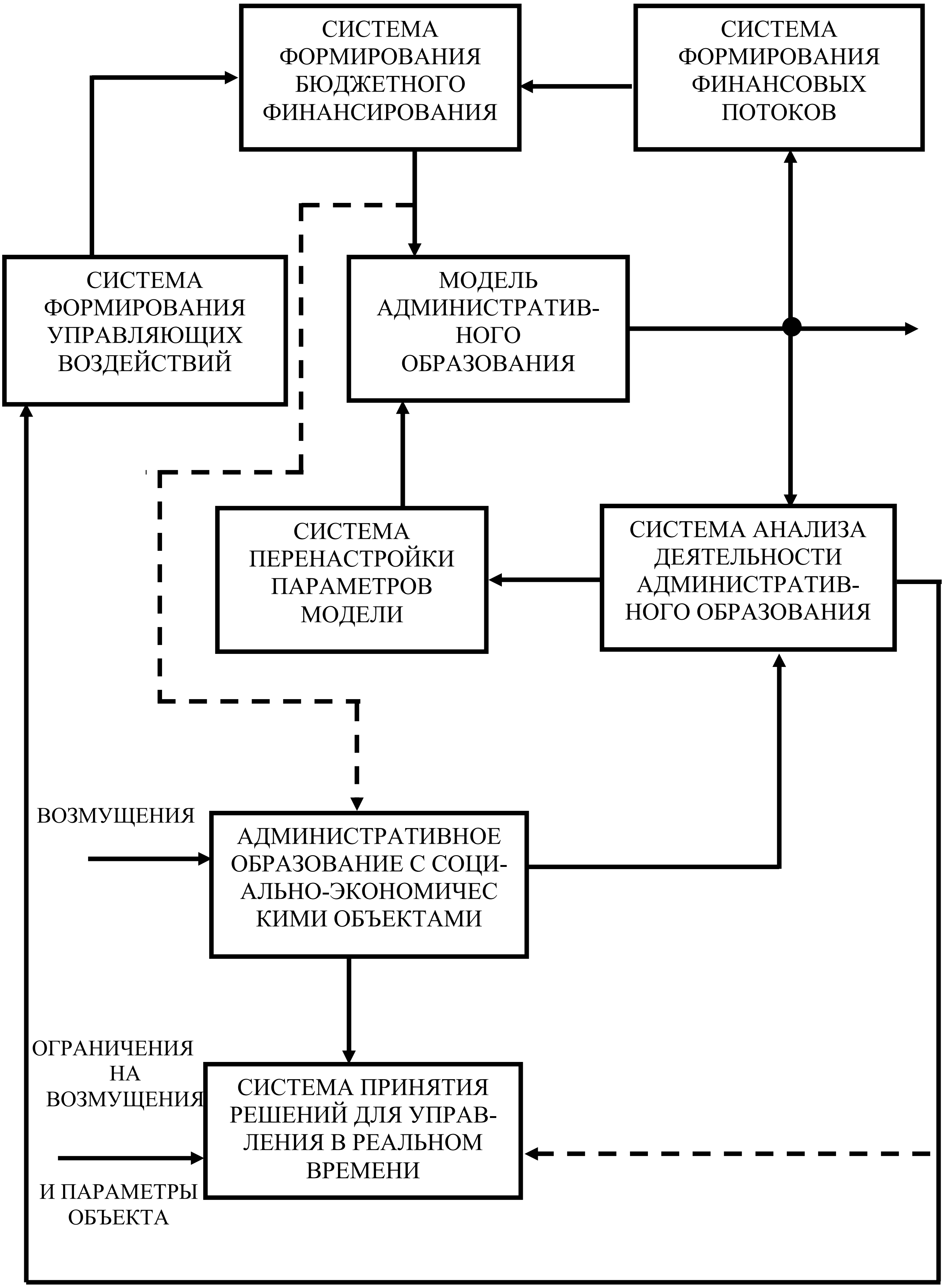

Рис. П.3.1. Структурная схема системы подготовки управленческих решений при бюджетном финансировании административного образования

Приложение 4

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ОСНОВНЫМ РАЗДЕЛАМ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ

Контрольное задание №1

I. Составить математическую модель преобразования ресурсов предприятия в продукцию или услуги.

1. Исходные данные представляются в виде таблицы (ниже приведен пример таблицы).

Таблица П. 4.1

Нормы расхода ресурсов при производстве продукции

Наименование продукции или услуг (символьное обозначение объёма продукции или услуг - x_i)	Наименование материалов и ресурсов (символьное обозначение объёмов материалов или ресурсов - y_i)		
	Сталь, т	Дизтопливо, л	Денежные средства, руб.
Изделие 1	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода
Изделие 2	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода
Изделие 3	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода

2. Записать математическую модель в виде системы линейных алгебраических уравнений и векторно-матричной форме $y = Ax$, где y, x – векторы, A – матрица соответствующей размерности, элементы которой равны нормам расхода.
3. Решить прямую задачу: при известных (планируемых) значениях объемов x_i продукции или услуг определить необходимое количество y_i материалов и ресурсов (решить уравнение $y = Ax$).
4. Решить обратную задачу: при заданных (ограничениях) значениях количества y_i материалов и ресурсов определить возможные значения объёмов x_i продукции или услуг (решить уравнение $x = A^{-1}y$).

II. Решить задачу оптимального планирования производства.

1. Исходные данные процесса производства (преобразования ресурсов предприятия) продукции или услуг формируются в виде таблицы.

Таблица П. 4.2

Нормы расхода ресурсов при производстве продукции

Наименование продукции или услуг (символьное обозначение объема продукции или услуг x_i)	Наименование материалов и ресурсов (символьное обозначение объёмов материалов и ресурсов)						Прибыль (или затраты) на единицу продукции или услуг
	Сталь, т	Дизтопливо, л	Продукты питания, кг	Электрическая энергия, кВт	Тепловая энергия, Гкал	Денежные средства, руб.	
Изделие 1	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	c_1
Изделие 2	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	Норма расхода	c_2
Фонд материалов или ресурсов	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	

2. Составить систему алгебраических неравенств вида $\sum a_i x_i \le b_i$, отражающих ограничения на необходимые материалы или ресурсы при изготовлении продукции (или предоставления услуг).
3. Составить целевую функцию вида $J(x) = \sum c_i x_i$, отражающую суммарную прибыль при реализации общего количества изделий (или услуг) или затраты на их производство.
4. Сформулировать задачу линейного программирования в текстовой форме.
5. Решить графическим способом задачу линейного программирования с определением целевой функции в вершинах многогранника на плоскости в пространстве двух переменных. Данные расчётов целевой функции представить в виде таблицы.

Таблица П.4.3

Данные расчёта целевой функции

Индекс вершины	Координаты вершины		Значение целевой функции
	x_1	x_2	
B			
C			
D			
E и т. д.			

6. Определить значения x_1 и x_2, при которых целевая функция равна максимальному значению (в случае прибыли) или минимальному значению (в случае затрат).

Примечание. В качестве исходных данных: типов материалов, ресурсов, их количества и норм расхода (табл. П.4.1, табл. П.4.2) использовать статистические данные о деятельности предприятия, на котором работает студент, или данные о семейном бюджете.

Контрольное задание № 2

I.Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции непрерывного времени при определённых условиях взаимодействия процессов производства и формирования запасов продукции. При выполнении задания целесообразно использовать следующие обозначения:

$x_1(t)$ – скорость изменения запасов продукции, руб./час.;

$x_2(t)$ – интенсивность производства (скорость выпуска продукции), руб./час.

Процессы производства и создания запасов продукции представляются дифференциальными уравнениями:

$$X_2(t) = a\,X_1(t) - b\,X_1(t),$$

$$X_2(t) = cX_1(t) - dX_2(t), \qquad (\text{П.4.1})$$

где a, c - безразмерные величины; b, d – коэффициенты, имеющие размерность времени. Для данной задачи a = 0,6; b = 0,4 час; c = 0,8; d =0,2 час.

Результатом выполнения **I** раздела задания является:

1. Представить систему дифференциальных уравнений (П.4.1) в виде векторно-матричного уравнения:

$$X(t) = A\,X(t), \qquad (\text{П.4.2})$$

где A – матрица соответствующей размерности.

2. Записать решение уравнения (П.4.2).

Общее решение уравнения (П.4.2) может быть записано в виде векторного уравнения

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} z_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} z_2 \ , \qquad (\text{П.4.3})$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования; λ_1, λ_2 - собственные значения (характеристические числа) матрицы A; z_1, z_2 - собственные векторы (характеристические векторы) матрицы A.

Для вычисления собственных значений λ_1, λ_2 матрицы A необходимо решить характеристическое уравнение

$$\det(A - I\lambda) = 0 \, . \qquad (\text{П.4.4})$$

Собственные векторы определяются из уравнений

$$\begin{aligned} A z_1 &= z_1 \lambda_1; \\ A z_2 &= z_2 \lambda_2. \end{aligned} \qquad (\text{П.4.5})$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 определяются из уравнения (П.4.3) при равенстве $t = t_0 = 0$ и соответствующих начальных значениях $X(t_0 = 0) = X_0$. Для данной задачи X_{10} = 6 руб./час; X_{20} = 4 руб./час.

Таким образом, векторное уравнение (П.4.3) записывается в виде системы скалярных уравнений

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} z_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} z_{21} \\ X_2(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} z_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t} z_{22} \end{aligned} \qquad (\text{П.4.6})$$

3. После необходимых вычислений построить зависимости (П.4.6) в графическом виде при изменении непрерывного времени от $t_0 = 0$ до t = 1 час.

II. Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции дискретного времени.

Для записи дискретного уравнения взаимосвязанных процессов производства и формирования запасов использовать уравнение (П.4.2), в котором производная $dX(t)/dt$ представляется отношением $\Delta X(t)/\Delta t$.

При решении данной задачи интервал Δt дискретности принимается равным значению 0,1 час.

Результатом выполнения **II** раздела задания является:

1. Запись последовательности дискретных уравнений вида

$$X_{k+1} = BX_k \qquad (\text{П.4.7})$$

при изменении k от 0 до 10.

2. Построение зависимости X_{1k}, X_{2k} в графическом виде при изменении k от 0 до 10 на одном рисунке с зависимостями $X_1(t), X_2(t)$.
3. Предоставление комментария о возможности аппроксимации непрерывных функций (П.4.6) дискретными функциями (П.4.7).

Примечание. Обязательными условиями при решении задачи являются:

- значение интенсивности производства должно быть больше или равным значению скорости изменения запасов продукции;
- начальные значения интенсивности производства и скорости изменения запасов продукции не равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев В.В. Экономические эссе / Пер. с англ. М., 1990. 415 с.
2. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. М., 1997. 208 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969. 340 с.
4. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М., 1979. 250 с.
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М., 1969. 320 с.
6. Клиланд Д., Кинг В. Системный анализ и целевое управление. М., 1974. 280 с.
7. Негойцэ К. Применение теории систем к проблемам управления/ Пер. с англ. М., 1981. 180 с.
8. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М., 1997. 330 с.
9. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения/ Пер. с англ. М., 1980. 608 с.
10. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М., 1996. 544 с.
11. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., 1984. 296 с.
12. Ашманов С.А. Линейное программирование. М., 1981. 340 с.
13. Данциг Дж. Линейное программирование. Его применения и обобщения. М., 1966. 280 с.
14. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике. М., 1974. 374 с.
15. Бигель Дж. Управление производством. Количественный подход. М., 1973. 304 с.
16. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 1975. 380 с.
17. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М., 1972. 250 с.
18. Федосеев и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. М., 2000. 220 с.
19. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных М. Математические методы в экономике. М., 1998. 180 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Григорьевич Букреев

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Часть 1

Учебное пособие

Ответственный за выпуск: Домбраускайте Л.В.
Технический редактор: Хисамутдинова М.Ф.

Сдано в печать: 30.04.2004
Подписано в печать: 23.01.2004
Тираж: 100 экз.
Формат: 60х84/16
Заказ: 016/У

Печать трафаретная
Бумага офсетная
Усл. печ. л. 6,5
Уч.-изд. л. 3,47

Центр учебно-методической литературы ТГПУ
Отпечатано в типографии ТГПУ,
Г. Томск, Ул. Герцена, 49. Тел. (3822) 52-12-93