ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Томский государственный педагогический университет

О. Д. АЗОРКИНА

В. Я. ЭПП

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Методическое пособие

Томск 2010

ББК 22.313я73
А 35

Печатается по решению
учебно-методического совета
Томского государственного
педагогического университета

А 35 Азоркина, О. Д., Эпп, В. Я. Электродинамика. Пособие по решению задач : методическое пособие / О. Д. Азоркина, В. Я. Эпп; ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет». – Томск : Изд-во ТГПУ, 2010. - 48 с.

Методическое пособие состоит из девяти разделов. Работа содержит краткий теоретический материал и задачи по всем разделам курса «Электродинамика».
Для студентов 3 курса физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета.

Рецензент:
профессор кафедры теоретической физики ТГПУ, доктор физико-математических наук И. Л. Бухбиндер.

Содержание

1. Векторная алгебра

Электромагнитное поле является векторным полем — оно задается векторами напряженности электрического и магнитного полей. Для того чтобы оперировать этими величинами нужно знать векторную алгебру и векторный анализ. Поэтому мы начинаем с повторения этих, чрезвычайно важных для электродинамики, разделов математики.

Вектор можно определить как направленный отрезок. В физике более употребительно другое определение: трехмерным вектором называется совокупность трех величин, которые при преобразовании координат преобразуются как координаты точки. Преобразования координат линейны, отсюда вытекает, что

а) произведение вектора на число есть вектор,

б) сумма векторов коммутативна.

Трехмерный вектор $\boldsymbol{a}$ в декартовой системе координат задается своими компонентами a_x, a_y, a_z и записывается в виде

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – единичные векторы, направленные по осям координат. Например, радиус-вектор точки:

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z. \tag{2}$$

Если векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ взаимно ортогональны, то система координат называется прямоугольной или декартовой.

Скалярное произведение. Скалярное произведение $(\boldsymbol{ab})$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляется по правилу

$$(\boldsymbol{ab}) = ab\cos\alpha, \tag{3}$$

где $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$ – модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, α – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

В декартовой системе координат

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{ab}) &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ a &= \sqrt{(\boldsymbol{aa})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \\ b &= \sqrt{(\boldsymbol{bb})} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Свойства скалярного произведения:
1. $(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ba})$
2. $\alpha(\boldsymbol{ab}) = (\alpha\boldsymbol{ab})$, где α - число
3. $(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})) \neq ((\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c})$
4. $(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{ab}) + (\boldsymbol{ac})$
5. $(\boldsymbol{ab}) = 0$, если $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$
6. $(\boldsymbol{aa}) = a^2$

Векторное произведение. Векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в декартовой системе координат вычисляется по правилу

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \\ + \boldsymbol{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (5)$$

Вектор $[\boldsymbol{ab}]$ ортогонален сомножителям $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и по модулю равен

$$|[\boldsymbol{ab}]| = ab\sin\alpha. \quad (6)$$

Направление вектора $[\boldsymbol{ab}]$ определяется правилом правого винта: если правый винт поворачивать от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ по кратчайшему пути, то он будет двигаться в направлении $[\boldsymbol{ab}]$ (см. рис. 1)

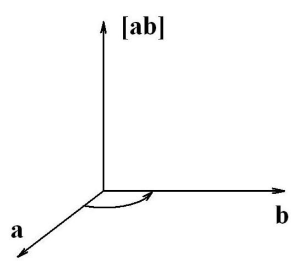

Рис. 1. Векторное произведение двух векторов

Свойства векторного произведения:
1.$[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$
2.$\alpha[\boldsymbol{ab}] = [\alpha\boldsymbol{ab}]$, где α - число
3.$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] \neq [[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$

4.$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]$
5.$[\boldsymbol{ab}] = 0$, если $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$
6.$[\boldsymbol{aa}] = 0$

Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется число

$$(\boldsymbol{abc}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Для смешанного произведения справедливы следующие соотношения:

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]) = (\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]).$$

Полезные тождества:
$([\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}]) = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$
$[[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})$

Задания

1. Доказать, что $[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$
2. Доказать тождество $([\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}]) = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$.
3. Доказать тождество $[[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})$.
4. Найти скалярное и векторное произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор):

a. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}$.
b. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}x^2 + \boldsymbol{j}y^2 + \boldsymbol{k}z^2$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$.
c. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\sin x + \boldsymbol{j}\cos x$,	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}\sin x + 2\boldsymbol{j}\cos x$.
d. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\cos x + \boldsymbol{j}\sin x$,	$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i}\sin x + \boldsymbol{j}\cos x$.
e. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\sin x - \boldsymbol{j}\cos x$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\cos x + \boldsymbol{j}\sin x$.
f. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$
g. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}x - \boldsymbol{j}y$.
h. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}x$,	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{j}y$.
i. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}x^3 + \boldsymbol{j}y^3 + \boldsymbol{k}z^3$	$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{i}}{x} + \frac{\boldsymbol{j}}{y} + \frac{\boldsymbol{k}}{z}$.
j. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{r}$,	$\boldsymbol{b} = y^2\boldsymbol{r}$.

k. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{r}$, $\quad$ $\boldsymbol{b} = z\boldsymbol{r}$.
l. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, $\quad$ $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}]$.

5. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно ортогональны и совершают гармонические колебания по закону

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_0 \cos\omega t, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}b_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Построить траекторию, которую описывает конец вектора $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

6. Вектор $\boldsymbol{a}$ имеет длину a_0 и вращается вокруг оси Z, образуя с ней угол θ, с угловой скоростью ω. Записать проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на оси декартовой системы координат.

7. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют длины a_0 и b_0 соответственно, лежат в плоскости XY и вращаются вокруг оси Z в противоположных направлениях с угловой скоростью ω. Направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ совпадают в тот момент, когда они лежат на оси X. Записать закон изменения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Какую кривую описывает конец каждого вектора?

8. Доказать, что перемещение $\boldsymbol{S}$ материальной точки является вектором.

9. Являются ли векторами следующие физические величины: сила, скорость, импульс, момент импульса?

2. Векторный анализ

Градиент. Если каждой точке пространства поставлено в соответствие некоторое число φ, то говорят, что в данном пространстве задано скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r})$.

Например, поле температур, поле давлений и т. д. Если $\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{const}$, то поле называется *однородным*. Если поле неоднородно, то его изменение от точки к точке характеризуется поверхностями уравня или линиями градиента.

Поверхностью уровня называется поверхность, в любой точке которой поле $\varphi(\boldsymbol{r})$ имеет одинаковые значения. Например, поверхностями постоянного атмосферного давления являются замкнутые поверхности, охватывающие Землю. В грубом приближении их можно считать концентрическими сферами. Изменение давления от одной сферы к другой описывается барометрической формулой.

Если скалярное поле задано на плоскости, то поверхности уровня вырождаются в линии уровня. Например, распределение температуры по поверхности задается двумерным полем температуры и характеризуется замкнутыми линиями уровня, лежащими на этой поверхности.

Уравнение поверхности уровня имеет вид $\varphi(\boldsymbol{r}) = c$, где $c = \text{const}$.

Градиентом скалярного поля называется вектор, направленный в сторону наибыстрейшего роста поля и по модулю равный производной от поля по данному направлению.

Линиями градиента называются такие линии, к которым вектор градиента всюду касателен.

Очевидно, что быстрее всего поле изменяется в направлении, перпендикулярном поверхности уровня. Поэтому градиент и линии градиента ортогональны поверхностям уровня.

В декартовой системе координат градиент вычисляется по формуле

$$\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{\nabla} \varphi = \boldsymbol{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{8}$$

Значок $\boldsymbol{\nabla}$ называется «набла»[1]. Можно ввести оператор

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}, \tag{9}$$

который скалярному полю $\varphi(\boldsymbol{r})$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{\nabla}\varphi$.

Например, с удалением от точечного источника света освещенность поверхности, перпендикулярной лучу света, убывает по закону

$$I(r) = \frac{I_0}{r^2}, \tag{10}$$

где r – расстояние до источника, I_0 – константа, характеризующая мощность источника света. Построим поверхности уровня для функции $I(r)$ и линии градиента. Из уравнения $I(r) = c$ находим

[1] По названию древнееврейского музыкального инструмента.

$$\frac{I_0}{r^2} = c, \quad r = \sqrt{\frac{I_0}{c}} = \text{const}\,.$$

Это уравнение сферы. Линии градиента, это линии, всюду ортогональные сферическим поверхностям. В данном случае это полубесконечные прямые, исходящие из источника. Вектор градиента направлен к источнику.

Правила вычисления градиента:
1.$\boldsymbol{\nabla} c = 0$, где $c = const$
2.$\boldsymbol{\nabla}(\varphi_1 + \varphi_2) = \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_2$
3.$\boldsymbol{\nabla}(c\varphi) = c\boldsymbol{\nabla}\varphi$
4.$\boldsymbol{\nabla}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \varphi_2\boldsymbol{\nabla}\varphi_1$

Поток вектора. Если каждой точке пространства поставлен в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, то говорят, что в данном пространстве задано векторное поле. Например, поле силы тяжести над поверхностью Земли. Другой пример векторного поля — поле градиента скалярной функции.

Потоком вектора $\boldsymbol{a}$ через элементарную площадку dS называется величина

$$d\Phi = a\,dS\cos\alpha, \tag{11}$$

где α — угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ к площадке (см. рис. 2).

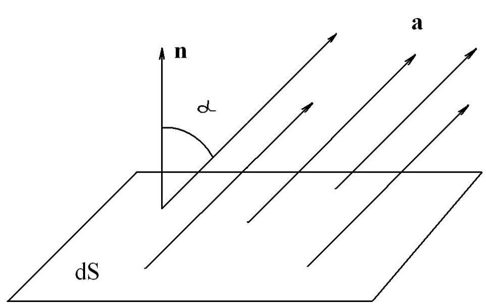

Рис. 2. Поток вектора $\boldsymbol{a}$ через площадку dS

Если силовые линии направлены по касательной к площадке dS, то $\cos\alpha = 0$ и поток равен нулю. Поток через площадку будет наибольшим, если она ориентирована перпендикулярно силовым линиям.

Определение (11) можно записать в виде $d\Phi = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})dS$. Если ввести вектор $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}\,dS$, то определение потока примет вид:

$$d\Phi = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}).$$

Поток вектора через некоторую заданную поверхность S равен интегралу

$$\Phi = \int\limits_S (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}).$$

Если поверхность S замкнута, то принято обозначение

$$\Phi = \oint\limits_S (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}).$$

При этом нормаль принято проводить во внешнюю сторону. Поэтому поток вектора, выходящего из замкнутой поверхности положителен, так как $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}) > 0$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ входит в поверхность, то угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{dS}$ тупой и $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}) < 0$ – входящий поток отрицателен. Если интеграл

$$\oint\limits_S (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}) = 0,$$

то это означает, что число входящих в замкнутую поверхность силовых линий равно числу выходящих.

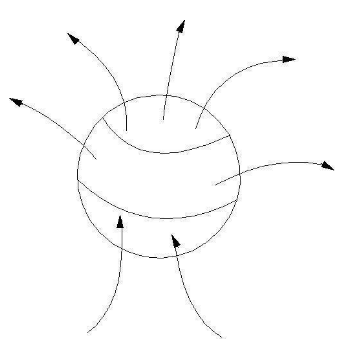

Рис. 3. Поток вектора через замкнутую поверхность положителен

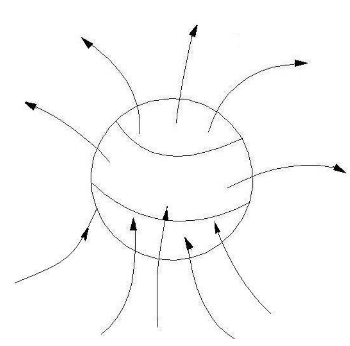

Рис. 4. Поток вектора через замкнутую поверхность отрицателен

Дивергенция. Векторное поле может содержать точки, в которых начинаются или заканчиваются силовые линии. Так, на рис. 5 силовые линии начинаются в точке A, а заканчиваются в точке B. В этом случае точка A называется источником поля, а точка B – стоком. «Мощность» источника или стока характеризуется величиной, называемой дивергенцией[2].

Дивергенцией векторного поля $\boldsymbol{a}(r)$ в точке A называется предел

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}}{\Delta V},$$

где ΔV — объем, охваченный замкнутой поверхностью, по которой производится интегрирование. Объем стягивается в точку A.

Таким образом, дивергенция поля в точке A положительна, если поток через поверхность, охватывающую эту точку положителен и, следовательно, в ней начинаются силовые линии.

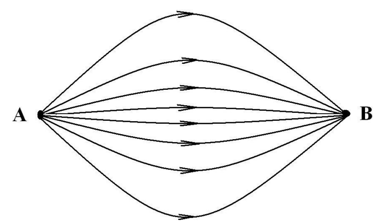

Рис. 5. Точка A – источник векторного поля, а точка B – сток

Правила вычисления дивергенции: $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a})$

1. $\operatorname{div} c = 0$, где $c = \text{const}$
2. $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{div}\boldsymbol{a}_1 + \operatorname{div}\boldsymbol{a}_2$
3. $\operatorname{div}(c\boldsymbol{a}) = c\operatorname{div}\boldsymbol{a}$
4. $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nabla}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}$

Циркуляция вектора. Циркуляцией вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру L называется интеграл

$$C = \oint_L (\mathbf{adl})$$

[2]От латинского divergo – расходимость

Другими словами, циркуляция представляет собой предел суммы скалярных произведений вектора $\mathbf{a}$ в данной точке контура на бесконечно малый отрезок $\mathbf{dl}$ контура. Если циркуляция поля по любому контуру равна нулю, то поле называется безвихревым. В простейших случаях, как на рис. 6–7 по картине силовых линий можно определить, является ли векторное поле вихревым.

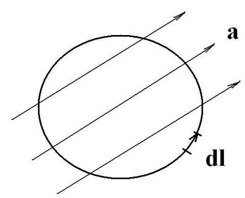

Рис. 6. Безвихревое поле. Циркулция вектора $\boldsymbol{a}$ равна нулю

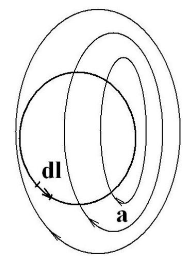

Рис. 7. Вихревое поле. Циркулция вектора $\boldsymbol{a}$ отрицательна

Ротор. Ротор (или вихрь) поля $\boldsymbol{a}$ есть вектор, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого поля, взятой с обратным знаком. Иначе: через данную точку A проводят небольшую площадку S; вычисляют циркуляцию $C = \oint\limits_L (\mathbf{adl})$ вдоль контура, ограничивающего эту площадку; рассматривают отношение этой циркуляции к площади S, когда S стремится к нулю, стягиваясь к точке A, причем положение плоскости площадки остается неизменным.

Ротором векторного поля $\boldsymbol{a}(r)$ в точке A называется предел

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \lim_{S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{dl}}{S},$$

где S – площадка проведенная через точку A, $\boldsymbol{n}$ – нормаль к площадке (направление нормали согласовано с направление обхода контура правилом правого винта). Изменяя направление этой площадки, устанавливают направление, при котором полученный предел достигает максимума. В точке A определяется вектор $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, модуль которого равен полученному максимуму.

Правила вычисления ротора: $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a}]$

1. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{a}_2$
2. $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{a}) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$
3. $\operatorname{rot} c = 0$
4. $\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a} \boldsymbol{\nabla} \varphi]$

Полезные соотношения:

$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a} c) = (c \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{a}) + [c \operatorname{rot} \boldsymbol{a}]$

$\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b})$

$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$

Задания

1. Доказать тождества:

a. $\boldsymbol{\nabla}(\varphi_1 + \varphi_2) = \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_2$.

b. $\boldsymbol{\nabla}(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \varphi_2 \boldsymbol{\nabla}\varphi_1$.

c. $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}], \quad \boldsymbol{c} = \mathbf{const}$.

2. Найти градиент скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ($\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – функции координат, $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$):

1. $\varphi = x^2 - y^2$.
2. $\varphi = x^3 - z^3$.
3. $\varphi = r^2$.
4. $\varphi = \frac{1}{r^2}$.
5. $\varphi = \sin r$.
6. $\varphi = \ln r$.
7. $\varphi = e^{x^2+y^2+z^2}$.
8. $\varphi = xy + yz + zx$.
9. $\varphi = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})$.
10. $\varphi = \frac{(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})}{r^2}$.
11. $\varphi = \sin(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$.
12. $\varphi = z^2 - r^2$.
13. $\varphi = \cos r$.
14. $\varphi = r^5$.
15. $\varphi = xyz$.
16. $\varphi = x^2 - y^2$.
17. $\varphi = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.
18. $\varphi = \ln xyz$.
19. $\varphi = \frac{x}{y}$.
20. $\varphi = \sin yz$.
21. $\varphi = e^{xyz}$.
22. $\varphi = (\boldsymbol{i}\boldsymbol{r})$.
23. $\varphi = (\boldsymbol{j}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{i}])$.
24. $\varphi = (\boldsymbol{j}\boldsymbol{r})$.
25. $\varphi = \frac{1}{r^2}$.
26. $\varphi = e^x + e^{-x}$.
27. $\varphi = \operatorname{tg} xz$.

3. Доказать тождества:
1. $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nabla}\varphi) + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a}$
2. $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b})$.
3. $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{\nabla}\varphi\boldsymbol{a}]$
4. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

4. Найти дивергенцию и ротор следующих векторов
($\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор): .

1. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{c}}{r}$,	16. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \ln xyz$,
2. $\boldsymbol{b} = r^2\boldsymbol{c}$.	17. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}e^{xyz}$.
3. $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{c}$,	18. $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}]$,
4. $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}$,	19. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
5. $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$.	20. $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{r}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}]]$,
6. $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$,	21. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\nabla} \ln r$.
7. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \ln r$.	22. $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{i}]$,
8. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}x$,	23. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}x^2 + \boldsymbol{j}y^2 + \boldsymbol{k}z^2$.
9. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$.	24. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \ln r$,
10. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}y$,	25. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{c}}{r^2}$.
11. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.	26. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}y$,
12. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \ln r$,	27. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}y$.
13. $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{r}$.	28. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}z$,
14. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$,	29. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}x^2$.
15. $\boldsymbol{b} = y\boldsymbol{r}$.	

5. Вычислить интегралы

$$\oint_s (\boldsymbol{A}d\boldsymbol{s})$$

или

$$\oint_L (\boldsymbol{B}d\boldsymbol{l}).$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – орты, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор, S – некоторая заданная замкнутая поверхность, L – заданный контур, лежащий в плоскости XY. Направление обхода контура образует с осью OZ правый винт.

a. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}$.
b. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$.
c. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}y + \boldsymbol{k}z$.
d. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} \sin x + \boldsymbol{j} \sin y$.

e. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}(y+z) + \boldsymbol{j}(x+z) + \boldsymbol{k}z$.
f. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b}$.
g. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}$.
h. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{cr}]$.
i. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}x - \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$.
j. $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}x - 3\boldsymbol{j}y$.

3. Специальная теория относительности

Теория относительности — физическая теория пространства и времени и их связи с материей и законами ее движения. Та часть общей теории относительности, в которой не рассматриваются вопросы связанные с тяготением (гравитацией), называется специальной теорией относительности (СТО).

Специальная теория относительности явилась итогом преодоления трудностей классической физики в объяснении оптических явлений в движущихся средах. В ее основе лежат два постулата:

— равноправие всех инерциальных систем отсчета,

– постоянство скорости света в вакууме (ее независимость от движения источника и приемника света).

Оба эти постулата являются обобщением опыта. Первый утверждает, что любое физическое явление протекает одинаково (то есть управляется одними и теми же законами), в каждой из инерциальных систем отсчета. Это означает, что, находясь в закрытой кабине и производя наблюдения механических движений, электрических и магнитных процессов и любых других явлений, невозможно установить, покоится кабина или движется равномерно и прямолинейно. Тем самым устанавливается относительность понятий «покой» и «равномерное прямолинейное движение».

Математической основой СТО являются законы преобразования декартовых координат (x, y, z) и времени t при переходе от одной инерциальной системы отсчета K к другой K', называемые преобразованиями Лоренца.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета с параллельными координатными осями y и z и совпадающими осями x, то есть система K' движется относительно системы K вдоль оси x с постоянной скоростью

u. Тогда преобразования Лоренца для координат имеют вид:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z;$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{u}{c},$$

где штрихованные величины относятся к системе K'. Преобразования Лоренца для проекций скорости на оси координат есть :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}},$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}},$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}.$$

Из соотношений Лоренца вытекают следующие эффекты СТО :

Сокращение продольных размеров тел. Пусть имеется стержень длиной l_0, покоящийся в системе K. В системе K' он движется равномерно и прямолинейно в направлении своей длины со скоростью u. Тогда его продольные (параллельные скорости) размеры l уменьшаются в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Поперечные размеры стержня остаются неизменными.

Замедление времени. Ход часов в движущейся с постоянной скоростью системе отсчета замедляется в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз по сравнению с ходом покоящихся часов. Если τ_0 – промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке некоторой системы отсчета (такое время называют собственным), а τ – время в системе отсчета, движущейся относительно первой со скоростью u, то

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Такое замедление течения времени наблюдается экспериментально в процессах распада быстро движущихся (со скоростями порядка световой) нестабильных элементарных частиц.

Эти пространственно-временные эффекты для инерциальных систем отсчета относительны: с точки зрения наблюдателя в K замедляются все процессы и сокращаются продольные размеры тел в K'.

Релятивистский закон сложения скоростей. Пусть в системе K тело движется вдоль оси x со скоростью v. Тогда в системе K', движущейся относительно K параллельно оси x со скоростью u, это тело имеет скорость

$$v' = \frac{v \pm u}{1 \pm uv/c^2}.$$

Знак $(\pm)$ определяется тем, одинаковы или противоположны направления скоростей v и u. Даже когда v или u (или и v, и u) близки по значению к скорости света, суммарная скорость v' оказывается меньше c. Таким образом, закон сложения скоростей отражает постоянство скорости света во всех системах отсчета.

При скоростях, много меньших скорости света, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея классической механики:

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Поэтому в области малых скоростей можно пользоваться представлениями об абсолютном (одинаковом во всех системах отсчета) времени и абсолютном пространстве, в котором расстояния безотносительны, то есть не зависят от движения системы отсчета.

Импульс и энергия.

Импульс частицы $\mathbf{p}$ определяется формулой

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

а полная энергия движущейся частицы равна:

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 – масса частицы в системе отсчета, где эта частица покоится (масса покоя), $\beta = v/c$. Даже когда тело покоится (равна нулю его кинетическая энергия) и не испытывает никаких воздействий (отсутствует потенциальная энергия), оно обладает энергией покоя

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2.$$

Из последних двух формул очевидно вытекает связь между энергией и импульсом частицы:

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Все положения СТО с большой точностью подтверждены экспериментом. Приведенная зависимость импульса и энергии от скорости вошла в инженерные расчеты ускорителей элементарных частиц на больших энергиях. Из последних формул видно, что при $v \to c$ энергия и импульс частицы стремятся к беконечности. Таким образом, скорость тела (частицы) с $m_0 \neq 0$ при его ускорении может сколь угодно близко приближаться к c, но не может ее достичь.

Иногда вводят величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

и условно называют ее массой движущегося тела. Это позволяет записать формулы для энергии и импульса в виде

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathcal{E} = mc^2.$$

Нужно, однако, иметь ввиду, что введенная таким образом «масса» не является мерой инертности тела, так как отношение силы, действующей на движущуюся частицу к ее скорости, вообще говоря, не совпадает с m.

Задания

1. С какой скоростью должны двигаться часы, чтобы они шли в 2 раза медленнее покоящихся?
2. С какой скоростью должно двигаться тело, чтобы его продольный (относительно скорости) размер был в 4 раза меньше?
3. Время жизни покоящихся пионов равно $1{,}8{\cdot}10^{-8}$с. Найдем время жизни пионов, движущихся со скоростью $V = (1 - 5 \cdot 10^{-5}) \cdot c$, где c – скорость света. Какой путь пройдут эти частицы за время своей жизни?
4. Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростью $0,5 \cdot c$ каждая (c – скорость света). Найти скорость одной ракеты относительно другой.
5. 2 кг воды нагрели от 0^0 С до 100^0 С. Как изменилась масса воды? Удельная теплоёмкость воды равна 4,1 Дж/кгК.
6. В закрытой полости находится 10^{23} хаотически движущихся фотонов с длиной волны 300 нм. Найти массу фотонного газа. Постоянная Планка $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж.с.
7. Найти массу покоя системы, состоящей из двух фотонов, разлетающихся под углом α. Частота каждого фотона равна ν.
8. С ракеты, движущейся со скоростью V относительно Земли, направлен луч света под углом θ относительно направления ее движения. Под каким углом θ' к скорости рекеты будет видеть луч земной наблюдатель? Решить задачу для $\theta = \frac{\pi}{2}$, $V = 0,5 \cdot c$, где c – скорость света.
9. Две частицы удаляются друг от друга со скоростью $0,8 \cdot c$ относительно земного наблюдателя. Какова относительная скорость частиц?
10. С космического корабля, движущегося к Земле со скоростью $0,4{\cdot}c$, посылают два сигнала: световой сигнал и пучок быстрых частиц, имеющих скорость относительно корабля $0,8 \cdot c$. В момент пуска сигналов корабль находился на расстоянии 12 Гм от Земли. Какой из сигналов и насколько раньше будет принят на Земле?
11. Найти кинетическую энергию электрона, который движется с такой скоростью, что его масса увеличивается в 2 раза.
12. Найти импульс протона, движущегося со скоростью $0,8 \cdot c$.

13. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость спутника составляет $v_0 =$ 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя по своим часам за время $\tau_0 =$ 0,5 года.
14. В лабораторной системе отсчета (К-система) пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l = 75$ м. Скорость пи-мезона равна $0,995 \cdot c$. Определить собственное время жизни пи - мезона.
15. Собственное время жизни мю-мезона равно $\tau_0 = 2$ мкс. Мю-мезон от точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчета пролетел расстояние $l = 6$ км. С какой скоростью v (в долях скорости света) двигался мезон?
16. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $v_1 = 0,6 \cdot c$ и $v_2 = 0,9 \cdot c$ вдоль одной прямой. Определить их относительную скорость u в двух случаях:
1) частицы движутся в одном направлении;
2) частицы движутся в противоположных направлениях.
17. В лабораторной системе отсчета удаляются друг от друга две частицы с одинаковыми по абсолютному значению скоростями. Их относительная скорость u в той же системе отсчета равна $0,5 \cdot c$. Определить скорости частиц.
18. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость иона относительно ускорителя равна $0,8 \cdot c$.
19. Электрон движется со скоростью $0,6 \cdot c$. Определить релятивистский импульс p электрона.
20. Полная энергия тела возросла на 1 Дж. На сколько при этом изменилась масса тела?
21. При какой скорости кинетическая энергия любой частицы вещества равна ее энергии покоя?
22. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в 4 раза?

4. Релятивистская динамика

Сила $\mathbf{F}$, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле называется силой Лоренца (формула для силы Лоренца впервые получена Х. А. Лоренцем, обобщившим экспериментальные данные) и имеет вид:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где e – заряд частицы, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ – магнитная индукция, $\mathbf{v}$ – скорость частицы относительно системы координат, в которой вычисляются величины $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Данная формула справедлива при любых значениях скорости заряженной частицы и является важнейшим соотношением электродинамики, так как позволяет связывать уравнения электромагнитного поля с уравнениями движения заряженной частицы.

Первый член в правой части формулы – сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле, второй – в магнитном. Так как магнитная часть силы Лоренца пропорциональна $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, то сила, действующая со стороны магнитного поля на частицу, перпендикулярна $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ и, следовательно, не совершает работы, а лишь искривляет траекторию движения частицы, не меняя ее энергии. Ее модуль в системе единиц Гаусса равен $\frac{e}{c}|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$. Таким образом, магнитная часть силы Лоренца максимальна при $\alpha = 90^o$ и равна нулю при $\alpha = 0$.

В вакууме $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, и формула для силы Лоренца принимает вид

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Задания

1. Частица, имеющая заряд q, движется со скоростью $\boldsymbol{V}$ в поле, образованном суперпозицией электрического поля $\boldsymbol{E}$ и магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Найти величину и направление силы, действующей на частицу, если:
a. $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$, $\quad \boldsymbol{H} = (0, 0, H)$, $\quad \boldsymbol{V} = (0, V, 0)$;
b. $\boldsymbol{E} = (0, 0, E)$, $\quad \boldsymbol{H} = (0, 0, H)$, $\quad \boldsymbol{V} = (0, V, 0)$;
c. $\boldsymbol{E} = (0, E_y, E_z)$, $\quad \boldsymbol{H} = (0, H, 0)$, $\quad \boldsymbol{V} = (V, 0, 0)$;
d. $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{H} = (0, H, 0)$, $\quad \boldsymbol{V} = (0, 0, V)$;
2. Существует ли такая суперпозиция однородных электрического $\boldsymbol{E}$ и магнитного $\boldsymbol{H}$ полей, в которых заряженная частица движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}$? Если да, то каким условиям должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$?
3. Найти закон движения нерелятивистской заряженной частицы с массой m и зарядом e в однородном электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{E}$.
4. Решить уравнение движения заряженной частицы в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$.
5. Средний радиус орбиты электронов в ускорителе «Сириус» (ТПУ, Томск) равен 423 см. При энергии электронов 1 Гэв индукция магнитного поля на орбите равна 7880 Гс. Каким был бы радиус орбиты электронов, если бы они двигались в соответствии с законами классической механики?
6. Найти первую космическую скорость электрона, движущегося вокруг Земли в плоскости ее экватора. Напряженность магнитного поля Земли вблизи поверхности равна $\boldsymbol{H}$. В каком случае эта скорость больше – при движении с запада на восток или с востока на запад?

5. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла – фундаментальные уравнения классической электродинамики, описывающие электромагнитные явления.

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками, то есть с распределением в пространстве электрических зарядов и токов. В вакууме электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}$ – векторными величинами, зависящими от пространственных координат и времени. Эти величины определяют силы, действующие со стороны поля на заряды и токи, распределение которых в пространстве задается плотностью заряда ρ (величиной заряда в единице объема) и плотностью электрического тока $\mathbf{j}$ (количеством заряда, протекающего в единицу времени через единичную поперечную площадку).

Уравнения Максвелла могут быть записаны в интегральной или дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла в интегральной форме определяют не векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в отдельных точках пространства, а некоторые интегральные величины, зависящие от распределения этих характеристик поля: циркуляцию векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ вдоль произвольных замкнутых контуров и потоки векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через произвольные замкнутые поверхности.

Первое уравнение Максвелла (обычно называемое теоремой Гаусса) представляет собой обобщение закона Кулона:

$$\oint_S (\mathbf{Eds}) = 4\pi \int_V \rho dV. \tag{12}$$

Левая часть этого уравнения выражает поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S, а правая часть пропорциональна величине электрического заряда, находящегося внутри этой поверхности (в объеме V, ограниченном поверхностью S).

Допустим, что некоторая замкнутая поверхность охватывает положительный заряд. Тогда из уравнения (12) следует, что поток вектора $\mathbf{E}$ тоже положителен. Это означает, что вектор $\mathbf{E}$ выходит из поверхности или, по крайней мере, выходящий поток больше входящего, как на рис. 8. И наоборот, если поверхность охватывает отрицательный заряд, то входящий поток больше выходящего. Теорема Гаусса отражает, в частности, соглашение о том, что силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

Из первого уравнения Максвелла следует еще одно важное свойство электрического поля: если заряд увеличить в несколько раз, то во столь-

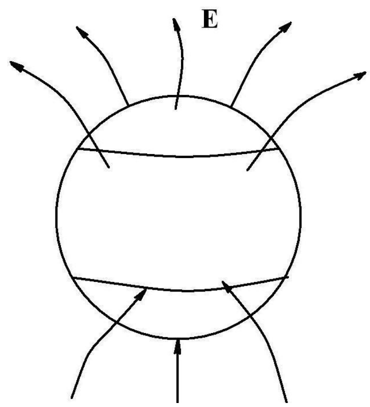

Рис. 8. Поток вектора **E** через замкнутую поверхность

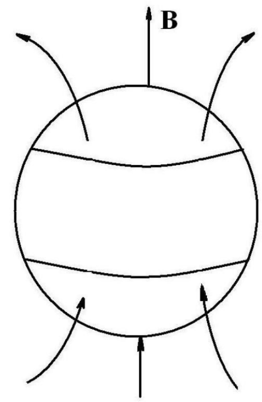

Рис. 9. Поток вектора **B** через замкнутую поверхность

ко же раз увеличится поток и, следовательно, электрическое поле. Или, если написать два таких уравнения для одной и той же поверхности, но для разных зарядов, а затем сложить левые и правые части уравнений, то получим, что суммарный поток пропорционален сумме зарядов. Поскольку этот вывод справедлив для любой поверхности, он означает, что поле двух зарядов равно сумме полей, создаваемых каждым зарядом. Это утверждение называется принципом суперпозиции.

Аналогичное уравнение Максвелла для магнитной индукции выражает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов (магнитное поле порождается только электрическими токами):

$$\oint_S (\mathbf{B}d\mathbf{s}) = 0, \tag{13}$$

то есть поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю. Другими словами, количество входящих в поверхность силовых линий равно количеству выходящих, как, например, на рис. 9.

Третье уравнение Максвелла является математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея и записывается в виде:

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S (\mathbf{B}d\mathbf{s}), \tag{14}$$

где $c = 3 \times 10^{10}$ см/с - постоянная, равная скорости распространения электромагнитных взаимодействий (скорость света) в вакууме. То есть циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура L (сумма скалярных произведений вектора $\mathbf{E}$ в данной точке контура на бесконечно малый отрезок $\mathbf{dl}$ контура) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции через поверхность S, ограниченную данным контуром. Левая часть уравнения (14) называется ЭДС индукции. Поскольку здесь поверхность S не замкнута, возможны два направления нормали (напомним, что нормаль к замкнутой поверхности принято направлять во внешнюю сторону). Оба направления равноправны, важно лишь проследить, чтобы направление обхода контура (направление вектора $\mathbf{dl}$ и направление нормали были связаны правилом правого винта или правилом правой руки).

На рис. 10 приведен пример, когда вектор магнитной индукции и вектор нормали образуют острый угол.

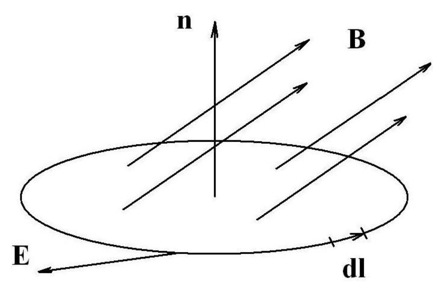

Рис. 10. Если индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ образует острый угол с направлением нормали и растет, то индуцированное электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено против направления обхода контура

В таком случае поток вектора $\mathbf{B}$ положителен (интеграл в правой части уравнения (14)). Если при этом $\mathbf{B}$ растет, то производная по времени в правой части уравнения (14) положительна, а левая часть этого уравнения отрицательна. Это означает, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{dl}$ образуют тупой угол.

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением на переменные поля эмпирического закона Био - Савара о возбуждении магнитного поля электрическими токами. Максвелл высказал гипотезу, что магнитное поле порождается не только токами, текущими в проводнике, но и переменными электрическими полями в диэлектриках или вакууме. Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа максвелловским током смещения, он возбуждает магнитное поле по тому же закону, что и ток проводимости. Четвертое уравнение Максвелла имеет вид:

$$\oint_L \mathbf{B}\mathbf{dl} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\mathbf{ds}, \tag{15}$$

то есть циркуляция вектора магнитной индукции вдоль замкнутого контура L определяется полным током через произвольную поверхность S, ограниченную данным контуром. Величина $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial E}{\partial t}$ называется током смещения. Относительное направление векторов, входящих в уравнение (15), показано на рисунках 11 и 12.

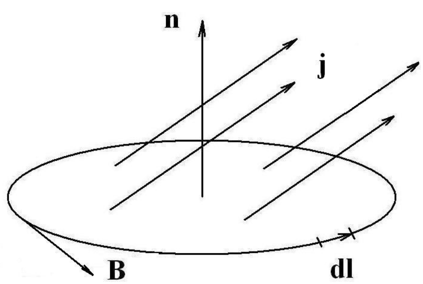

Рис. 11. Магнитное поле, создаваемое плотностью тока $\mathbf{j}$

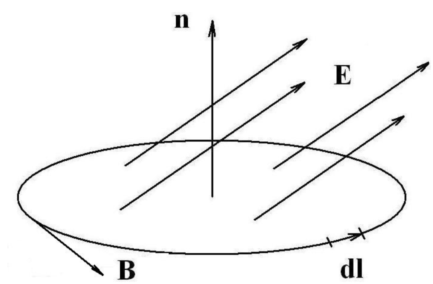

Рис. 12. Индуцированное магнитное поле, создаваемое изменяющимся (здесь – растущим) электрическим полем

Если считать, что векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ являются непрерывными функциями координат, то с помощью теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Стокса можно от интегральных уравнений Максвелла (12–15) перейти к системе дифференциальных уравнений Максвелла, характеризующих поле в каждой точке пространства:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{16}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Физический смысл уравнений (16) тот же, что уравнений (12–15).

Для описания электромагнитных процессов в материальной среде, кроме векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вводятся вспомогательные векторные величины, зависящие от состояния и свойств среды: электрическая индукция $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. В вакууме $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. Уравнения Максвелла для поля в среде имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{17}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле обладает энергией и импульсом. Плотность энергии W (энергия поля в единице объема) равна:

$$W = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \tag{18}$$

Электромагнитная энергия может перемещаться в пространстве. Плотность потока энергии определяется, так называемым, вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \tag{19}$$

Задания

1. Найти напряженность электрического поля, создаваемого заряженной сферой радиуса R. Поверхностная плотность заряда сферы равна σ.
2. Найти напряженность электрического поля, создаваемого двумя концентрическими сферами радиуса r_1 и r_2 ($r_1 \le r_2$). Поверхностная плотность заряда сфер равна соответственно σ_1, σ_2.
3. Найти потенциал электрического поля, создаваемого системой зарядов, заданной в предыдущей задаче, в области $r < r_1$, полагая, что $\varphi(\infty) = 0$.
4. Найти энергию электрического поля системы, описанной в зад. **2**.
5. Найти напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью.
6. Найти напряженность электрического поля бесконечной прямой заряженной нити. Линейная плотность заряда нити равна σ.
7. Найти напряженность электрического поля, создаваемого двумя бесконечными соосными цилиндрами радиуса r_1 и r_2 ($r_1 \le r_2$). Заряд единицы длины цилиндров равен соотвеиственно.
8. Система, описанная в задаче **7**, окружена соосным цилиндром радиуса ρ и длиной l. С какой силой внутренние цилиндры действуют на каждую половину внешнего цилиндра?
9. Найти напряженность магнитного поля бесконечного прямого проводника с током. Ток I равномерно распределен по сечению проводника радиуса R. Построить график $H(r)$.
10. Найти напряженность магнитного поля, создаваемого током, равномерно распределенным по поверхности бесконечного цилиндра и направленным по образующей цилиндра. Линейная плотность тока (ток через единицу поперечной длины) равна σ, радиус цилиндра R.
11. Найти напряженность магнитного поля, создаваемого бесконечной плоскостью, по которой однородно распределен линейный ток с плотностью σ (ток на единицу длины, перпендикулярной линиям тока).
12. Найти напряженность магнитного поля, создаваемого токами, текущими по двум бесконечным соосным цилиндрам радиуса r_1 и r_2 ($r_1 \le r_2$). Поверхностная плотность токов (ток на единицу поперечной длины) равна соответственно σ_1, σ_2. Напряженность поля считать по-

ложительной, если его направление определяется правилом правого винта относительно выбранного положительного направления оси.
13. Чему равна максимальная ЭДС в тонкой катушке радиусом 10см, которая вращается со скоростью 30 об/с в магнитном поле Земли величиной 0.5 Гс?
14. Конденсатор, состоящий из двух дисков, расстояние между которыми много меньше их радиуса, заряжается так, что напряженность электрического поля равномерно увеличивается со скоростью μ. Найти напряженность магнитного поля между обкладками конденсатора на расстоянии r от его оси.

6. Постоянное электрическое поле

Электростатика – раздел электродинамики, в котором изучается взаимодействие неподвижных электрических зарядов. Такое взаимодействие осуществляется посредством электростатического поля. Основной закон электростатики – это закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

где F – сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, r – расстояние между зарядами, ε – диэлектрическая проницаемость среды. Источниками электростатического поля являются электрические заряды и взаимодействие между зарядами происходит через электрическое поле. Любой заряд изменяет свойства окружающего пространства – то есть создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в поле электрический заряд оказывается под действием силы. Об «интенсивности поля» судят по величине силы , действующей на заряд. Величину, характеризующую электрическое поле называют напряженностью поля в данной точке

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q},$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд q, помещенный в данную точку поля. Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии $\mathbf{r}$ от заряда есть

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r},$$

Если известен потенциал поля $\varphi(\mathbf{r})$, то напряженность электрического поля можно вычислить по формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Потенциал точечного заряда в соответствии с законом Кулона равен

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$$

Потенциал электрического поля произвольной системы зарядов описывается уравненим Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon},$$

где $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа. Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV}{\varepsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Интеграл берется по всему объему, занятому зарядами.

Диполь есть электронейтральная система двух точечных и равных по абсолютной величине положительного и отрицательного электрических зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Электрическим моментом диполя $\mathbf{d}$ называется вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и равный произведению заряда $|q|$ на вектор $\mathbf{l}$, проведенный от отрицательного заряда к положительному и называемый плечом диполя, то есть

$$\mathbf{d} = |q|\mathbf{l}.$$

Если устремить расстояние l к нулю, а величину заряда q к бесконечности таким образом, чтобы их произведение оставалось конечным, то получим объект, который называется точечным диполем. Если плечо диполя много меньше расстояния r от центра диполя до точки, в которой нас интересует действие диполя $(l \ll r)$, то с погрешностью порядка l/r можно считать диполь точечным.

Напряженность поля точечного диполя в произвольной точке пространства определяется формулой

$$E = \frac{d}{\varepsilon r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha},$$

где r – абсолютное значение радиус-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность поля в которой нас интересует, α – угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и плечом $\mathbf{l}$ диполя.

Вдали от электрического диполя напряжённость его электрического поля убывает с расстоянием как r^{-3}, то есть быстрее, чем у точечного заряда ($E \sim r^{-2}$).

На электрический диполь, находящийся в электрическом поле, действует момент сил, стремящийся повернуть диполь в направлении поля. Величина этого момента равна

$$\mathbf{M} = [\mathbf{d}, \mathbf{E}].$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью с постоянной повехностной плотностью σ равна

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Поверхностная плотность заряда есть заряд, приходящийся на единицу поверхности

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью на расстоянии r от ее оси равна

$$E = \frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

где τ - линейная плотность заряда. Линейная плотность заряда есть количество заряда, приходящегося на единицу длины нити:

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

Задания

1.Показать, что емкость плоского конденсатора C определяется формулой $C = S/4\pi d$, где S – площадь каждой пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами. Емкостью конденсатора называется отношение его заряда к разности потенциалов между обкладками.
2. Найти распределение заряда и полный заряд системы, потенциал которой равен

$$\varphi(r) = \frac{a}{r}\, exp(-r/b).$$

3. Найти величину и направление момента сил, действующих на электрический диполь $\boldsymbol{d}$ в однородном электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Угол между векторами $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{E}$ равен α.
4. Найти потенциал электрического поля системы зарядов, изображенной на рис. 13, вдали от этой системы. Показать, что потенциал является дипольным.

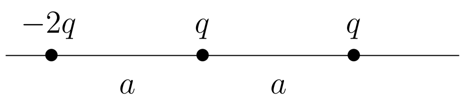

Рис. 13.

5. Определить потенциал и напряженность электрического поля на оси тонкого диска радиуса R, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ. Убедиться, что вдали от диска поле совпадает с кулоновским, а вблизи диска – с полем бесконечной плоскости.
6. Решить задачу 5 п.5 используя общее решение уравнения Пуассона.
7. Найти потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого зарядами q и $-q$, находящимися на расстоянии a друг от друга. Построить качественную картину силовых линий электрического поля. Найти потенциал электрического поля в пределе $a \to 0$, $q \to \infty$ при $a, q = const$. Результат выразить через вектор дипольного момента

$$\boldsymbol{d} = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i.$$

8. Найти потенциал системы зарядов, изображённой на рис. 14, на больших расстояниях $r > a \sim b$ от системы.

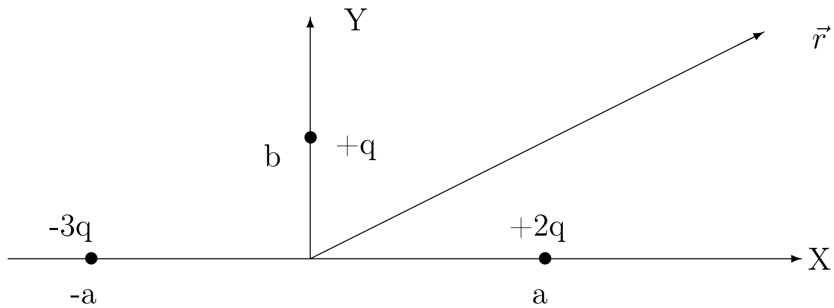

Рис. 14.

9. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от поверхности бесконечной проводящей пластины. Используя метод изображений, получить скалярный потенциал φ. Проверить прямой подстановкой, что решение удовлетворяет уравнению Пуассона и всем граничным условиям. Вычислить плотность поверхностных зарядов σ и силу взаимодействия заряда с поверхностью. Найти полный индуцированный заряд.

10. Точечный заряд q расположен внутри прямого угла, образованного двумя бесконечными проводящими полуплоскостями. Найти потенциал поля во всем пространстве и силу, действующую на заряд.

11. Построить изображения заряда, находящегося между проводящими плоскостями, образующими угол $\pi/3$; $\pi/4$.

12. Точечный заряд q находится в центре проводящего сферического слоя. Внутренний и внешний радиусы прводника равны r_1 и r_2 соответственно. Найти потенциал $\varphi(r)$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}(r)$ во всем пространстве. Найти плотность заряда на внутренней и внешней поверхности проводника. Построить графики зависимости $\varphi(r)$ и $E(r)$.

13. Решить предыдущую задачу 12 считая, что проводник заземлен.

14. Конденсатор состоит из двух концентрических сфер радиуса r_1 и r_2. Внутренняя и внешняя обкладки имеют заряды $+q$ и $-q$ соответственно ($q > 0$). Найти потенциал $\varphi(r)$ и поле $\boldsymbol{E}(r)$ во всем пространстве. Построить графики зависимостей $\varphi(r)$ и $E(r)$. Найти емкость конденсатора.

15. Решить предыдущую задачу 14, считая что внешний проводник заземлен.

16. Найти закон преломления (соотношение между углами α и β, рис. 15) силовой линии электрического поля на границе раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2.

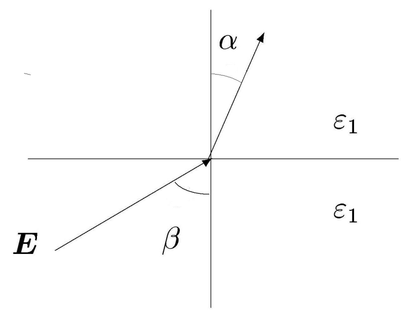

Рис. 15.

17. Точечный заряд q находится в центре сферического слоя диэлектрика с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 соответственно. Диэлектрическая проницаемость сферического слоя равна ε. Найти потенциал $\varphi(r)$ и электрическое поле $E(r)$. Найти объемную плотность заряда в диэлектрике, поверхностную плотность заряда на границах сферического слоя и полный заряд диэлектрика.

18. Найти энергию поля плоского конденсатора, если его заряд равен q, а площадь каждой обкладки S. Чему будет равна энергия поля конденсатора после того, как пространство между обкладками заполнили диэлектриком с проницаемостью ε? Куда «ушла» часть энергии?

19. В пространство между обкладками плоского конденсатора помещена пластина с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 16). Заряд конденсатора равен q, площадь каждой обкладки S. Найти напряженность электрического поля во всем пространстве внутри конденсатора и плотность заряда на поверхности диэлектрика. Найти поверхностную плотность заряда, если диэлектрик заполняет все пространство между обкладками конденсатора.

20. Между обкладками плоского конденсатора находится двухслойная диэлектрическая пластина как показано на рис. 17. Заряд кон-

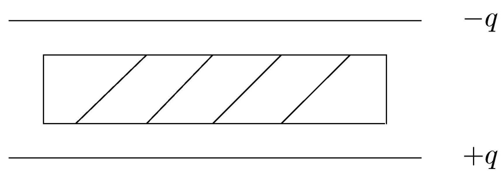

Рис. 16.

денсатора равен q, площадь обкладок S, диэлектрические проницаемости материала пластинки ε_1 и ε_2. Найти электрическое поле между обкладками и поверхностную плотность заряда на всех границах 1-5.

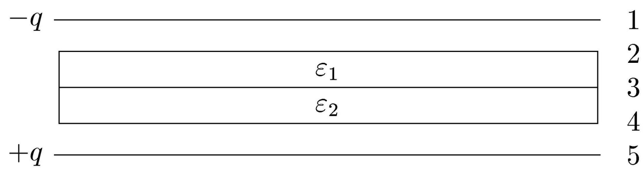

Рис. 17.

21. Какую работу нужно совершить, чтобы ввести в пространство между обкладками плоского конденсатора диэлектрическую пластинку объемом V? Первоначальная напряженность электрического поля в конденсаторе равна E.

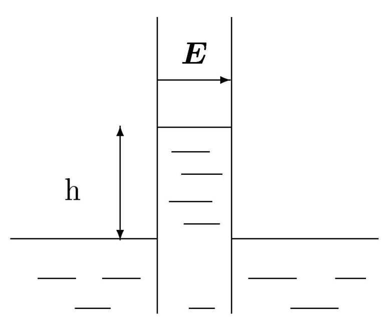

Рис. 18.

22. Плоский конденсатор частично погружен в диэлектрическую жидкость как показано на рис. 18. На какую высоту h поднимется жидкость, если ее диэлектрическая проницаемость равна ε, а напряженность электрического поля между обкладками конденсатора в вакууме равна E? Плотность жидкости равна ρ.

7. Постоянное магнитное поле

Магнитостатика описывает свойства постоянного магнитного поля. Основной измеряемой характеристикой величины магнитного поля является вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$. Для расчета этой величины очень полезна другая характеристика магнитного поля – векторный потенциал $\mathbf{A}$. Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Векторный потенциал магнитного поля, создаваемого произвольным распределением тока описывается уравненим Пуассона:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\mu}{c} j(\mathbf{r}).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mu j(\mathbf{r}')dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Интеграл берется по всему объему, занятому током. Чтобы найти индукцию магнитного поля, нужно взять ротор от этого выражения. В результате получим закон Био - Савара - Лапласа:

Закон Био - Савара - Лапласа – физический закон для определения модуля вектора магнитной индукции в любой точке магнитного поля, порождаемого постоянным электрическим током на некотором рассматриваемом участке. Был установлен экспериментально в 1820 году Био и Саваром. Лаплас проанализировал данное выражение и показал, что с его помощью путём интегрирования, в частности, можно вычислить магнитное поле движущегося точечного заряда, если считать движение одной заряженной частицы током. Пусть постоянный ток I течет по контуру, находящимуся в вакууме. Модуль вектора мангитной индукции поля dB, создаваемого элементом проводника с током выражается формулой

$$dB = \frac{\mu}{c}\frac{I\sin\alpha}{r^2}dl,$$

где α – угол между векторами dl и r (направление dB перпендикулярно dl и r, то есть перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции; это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (правилу правого винта): направление вращения головки винта дает направление dB, если поступательное движение буравчика соответствует направлению тока в элементе); μ – магнитная проницаемость; dl – элемент длины проводника; r – расстояние от середины элемента проводника до точки, магнитная индукция в которой определяется.

Закон Ампера – закон взаимодействия постоянных токов. Установлен Андре Мари Ампером в 1820 году. Из закона Ампера следует, что параллельные проводники с постоянными токами, текущими в одном направлении, притягиваются, а в противоположном – отталкиваются. Законом Ампера называется также закон, определяющий силу, с которой магнитное поле действует на малый отрезок проводника с током. Сила $\mathbf{F}$, с которой магнитное поле действует на проводник с током в магнитном поле

$$\mathbf{F} = [\mathbf{l}, \mathbf{B}]I,$$

где I – сила тока; $\mathbf{l}$ – вектор, равный по модулю длине проводника и совпадающий по направлению с током; $\mathbf{B}$ – магнитная индукция поля.

Модуль силы Ампера F определяется выражением

$$F = BIl\sin\alpha,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$ и направлением тока $\mathbf{l}$.

Задания

1. Найти напряженность магнитного поля на оси тонкого кольца с током. Сила тока равна I, радиус кольца - R. Показать, что вдали от

кольца поле имеет дипольный характер.
2. Решить задачу 11 п.5 используя закон Био - Савара.
3. Напряженность магнитного поля вблизи поверхности нейтронных звезд составляет величину порядка 10^{12} Э. Найти плотность энергии такого магнитного поля в единицах массы.
4. Плоский конденсатор, имеющий заряд q, движется со скоростью $\boldsymbol{V}$ паралельно плоскости пластин. Считая поле между обкладками однородным, найти напряженности электрического и магнитного полей. Решить задачу двумя способами:
a) найти поле неподвижного конденсатора и преобразовать его в движущуюся систему отсчета;
b) найти плотность заряда и плотность тока движущихся пластин и использовать решения задач 5 п.5 и 11 п.5.
5. Найти плотность энергии и вектор Умова - Пойнтинга для поля движущегося конденсатора, описанного в предыдущей задаче. Убедиться в том, что величины $I_1 = E^2 - H^2$ и $I_2 = (\boldsymbol{EH})$ являются инвариантными.
6. Найти напряженность магнитного поля, создаваемого электроном в центре атома водорода, считая что электрон движется по круговой орбите в соответствии с законами классической механики. Энергия атома равна $\mathcal{E}$, заряд ядра и электрона
7. В сферических координатах компоненты вектора $\boldsymbol{j}$ средней объёмной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода, равны

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = \frac{1}{2 * 3^8} \frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} sin^3\theta,$$

где a – боровский радиус, $\hbar$ – постоянная Планка, m и e – масса и заряд электрона, а r – расстояние до протона. Орбитальный ток создаёт в пространстве магнитное поле. Найти напряженность $\boldsymbol{H}$ этого магнитного поля в начале координат. Сравнить с решением предыдущей задачи, имея в виду, что радиус и энергия основного состояния атома водорода равны

$$a = \frac{\hbar}{2\pi m e^2}, \qquad \mathcal{E} = \frac{e^4 m}{2\hbar}.$$

8. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля тонкого кольца с током I на расстояниях r, много больших радиуса кольца R.
9. Найти векторный потенциал и магнитное поле шара радиуса R, равномерно заряженного по объёму зарядом q и вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр, на больших расстояниях $r > R$.
10. Найти плотность объемных и поверхностных молекулярных токов цилиндра, однородно намагниченного параллельно своей оси. Индукция магнитного поля в объёме цилиндра равна $\boldsymbol{B}$, магнитная проницаемость вещества равна μ.
11. Из цилиндра, имеющего намагниченность $\boldsymbol{M}$, параллельную его оси, вырезан соосный цилиндр меньшего радиуса (см. рис. 19). Найти объемную и поверхностную плотность молекулярных токов для обоих цилиндров.

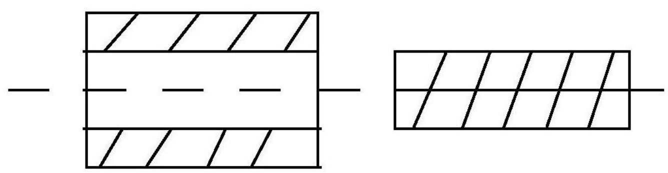

Рис. 19.

12. Найти плотность поверхностных молекулярных токов однородно намагниченного шара. Вектор намагничения равен $\boldsymbol{M}$.
13. Найти индукцию и напряженность магнитного поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником с током I, находящимся в среде с магнитной проницаемостью μ.
14. Найти плотность молекулярного тока в среде при условиях, сформулированных в задаче 13.
15. Бесконечный линейный ток I совпадает с осью цилиндрического слоя с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 соответственно. Магнитная проницаемость вещества слоя равна μ. Найти плотность объемных и поверхностных молекулярных токов.
16. Найти индукцию и напряженность магнитного поля в тонком

зазоре С-образного сердечника, показанного на рис. 20. Индукция магнитного поля в сердечнике равна $\boldsymbol{B}$.

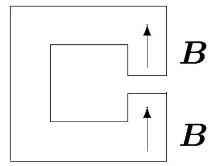

Рис. 20.

17. Найти напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в середине узкой и длинной щели, проделанной в твердом, однородно намагниченном магнетике. Рассмотреть два случая: щель перпендикулярна и параллельна силовым линиям (см. рис. 21). Индукция поля в магнетике равна $\boldsymbol{B}$, магнитная проницаемость - μ.

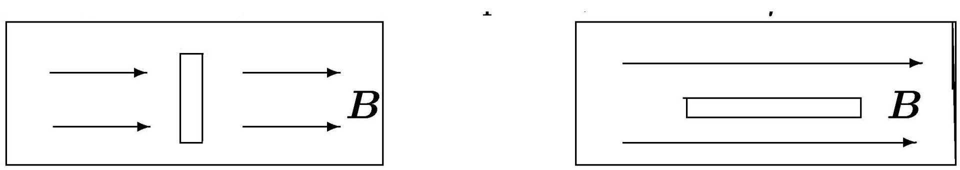

Рис. 21.

18. Почему сердечники трансформаторов набирают из пластин так, как показано в левой части рис. 22, а не так, как в правой? Отличаются ли индукционные и молекулярные токи изображенных сердечников?

Рис. 22.

8. Электромагнитные волны

Электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. Если возбудить с помощью зарядов переменное электрическое или магнитное поле, в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс может быть периодическим во времени и в пространстве и это изменение его состояния имеет волновой характер. Поля такого типа называют электромагнитными волнами. Возможность существования электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. В вакууме эти волны распространяются со скоростью света. Основное свойство электромагнитной волны заключается в том, что векторы напряженности электрического поля, магнитная индукция и направления распространения волны взаимно ортогональны:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}, \mathbf{n}], \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n}, \mathbf{E}],$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор направления распространения волны.

Волна называется плоской, если электрическое и магнитное поле волны имеют одинаковые значения во всех точках плоскости, ортогональной направлению распространения волны. Если направление распространения плоской волны выбрать в качестве оси x, то векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ зависят от координат и времени только как функции аргумента $t - x/c$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t - x/c), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t - x/c).$$

одной и той же плоскости:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} f_1(t - x/c), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B_0} f_2(t - x/c),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции, а $\mathbf{E_0}$ и $\mathbf{B_0}$ – постоянные векторы.

В простейшем случае зависимость от аргумента $t - x/c$ является гармонической, то есть векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ изменяются по закону синуса или косинуса с определенной частотой ω. Такая волна называется монохроматической. Если монохроматическая линейно поляризованная волна распространяется, например, вдоль оси x, то зависимость $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ от x и t можно записать в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \kappa x), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \kappa x),$$

причем $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$, $E_0 = B_0$ Величина $\kappa = n\omega/c$ - называется волновым вектором, а его абсолютное значение $\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом; λ – длина волны, то есть расстояние, на которое распространяется волна за период T , $\lambda = cT$.

Задания

1. Доказать, что свойства плоской электромагнитной волны (ортогональность векторов напряженностей электрического $\boldsymbol{E}$ и магнитного $\boldsymbol{H}$ полей и равенство модулей векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$) инвариантны относительно преобразований Лоренца.

2. Доказать, что напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ плоской электромагнитной волны и векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{n}].$$

3. Плоская монохроматическая электромагнитная волна с частотой ω распространяется в вакууме в направлениии оси Z. Записать выражение для $\boldsymbol{E}(z,t), \boldsymbol{H}(z,t)$ если волна

a) линейно поляризована,

b) имеет правовинтовую круговую поляризацию.

4. В плоскости $Z = 0$ поле электромагнитной волны задаётся уравнением

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{i}E_{ox}\cos\omega t + \boldsymbol{j}E_{oy}\sin\omega t.$$

Эта волна может быть представлена как сумма волн правой и левой круговой поляризации: $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$, где $\boldsymbol{E}_+$ и $\boldsymbol{E}_-$ – постоянные по модулю векторы, вращающиеся в противоположных направлениях (рис. 23).

Найти $E_+ = |\boldsymbol{E}_+|$ и $E_- = |\boldsymbol{E}_-|$.

5. Плоская электромагнитная волна задаётся уравнением

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{i}E_{ox}\cos\omega(t - \frac{z}{c}) + \boldsymbol{j}E_{oy}\sin\omega(t - \frac{z}{c}).$$

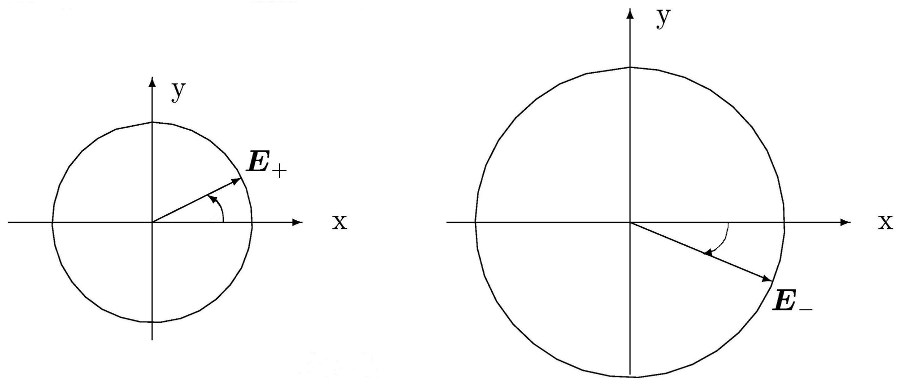

Рис. 23.

Найти плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля. Рассмотреть случаи линейной и круговой поляризации.
6. Найти силу давления плоской электромагнитной волны $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ на единицу поверхности, ортогональной направлению распространения волны. Вся энергия волны поглощается поверхностью.
7. Покоящийся цилиндр радиуса R и высоты h расположен перпендикулярно направлению распространения монохроматической плоской электромагнитной волны, которая описывается векторным потенциалом

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + \alpha).$$

Длина волны мала по сравнению с величинами R и h, поэтому за цилиндром простирается область тени. На поверхности цилиндра электромагнитная волна полностью поглощается. Определить силу $\boldsymbol{F}$, приложенную к цилиндру в среднем по времени за период $T = 2\pi/\omega$.

8. Излучение произвольно движущегося заряда

Поле покоящегося заряда постоянно во времени. Поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда изменяется во времени, но в сопутствующей инерциальной системе отсчета заряд покоится. Можно сказать, что равномерно движущийся заряд несет все свое поле с собой с той же скоростью, с которой он движется. Из уравнений Максвелла следует, что заряд, движущийся с ускорением, испускает электромагнитные волны. Излучение заряда распределено по направлениям неравномерно. Зависимость интенсивности излучения от направления называется угловым распределением излучения. Графическое представление этой зависимости называется диаграммой направленности или индикатриссой излучения.

Угловое распределение излучения произвольно движущегося заряда дается формулой:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4c^3}\left\{\frac{2(\boldsymbol{na})(\boldsymbol{va})}{c(1-\boldsymbol{n\beta})^2} + \frac{a^2}{(1-\boldsymbol{n\beta})^4} - \frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{na})^2}{(1-\boldsymbol{n\beta})^6}\right\},$$

где dI – количество энергии, излучаемой в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, a – ускорение частицы, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор в направлении излучения, $\beta = \frac{v}{c}$.

С помощью интегрирования этого выражения по углам можно найти полную мощность излучения – количество энергии $\mathcal{E}$, теряемой зарядом в единицу времени. Она равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3(1-\beta^2)^3}\left\{a^2 - [a,\beta]^2\right\}.$$

Задания

1. Передающая антенна представляет собой отрезок тонкого прямого провода, расположенного вертикально. Найти, в каком направлении относительно поверхности Земли генерируется максимальная интенсивность излучения

2. Заряженная частица совершает колебания по закону $x(t) = a\sin\omega t$. Найти угловое распределение излучения, предполагая, частицу нерелятивистской ($a\omega < c$). Построить диаграмму направленности.

3. Частица, имеющая заряд e и массу m движется под действием силы $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{k}f(t)$, где $\boldsymbol{k}$ - постоянный вектор. Найти угловое распределение и полную мощность излучения, считая частицу нерелятивистской.

4. Найти среднюю по времени мощность и угловое распределение излучения системы из двух нерелятивистских, одинаковых по модулю зарядов $|q_1| = |q_2|$, вращающихся по окружности радиуса R с угловой скоростью ω и сдвинутых на угол $\alpha = \pi$ (в противофазе). Рассмотреть случаи $q_1 = q_2$ и $q_1 = -q_2$.

5. Решить предыдущую задачу для случая $q_1 = q_2$, не предполагая, что заряды нерелятивистские.

6. Найти спектр излучения системы зарядов, описанной в задаче 3 в случае $q_1 = -q_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.

2. Мултановский, В. В. Курс теоретической физики. Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика / В. В. Мултановский. - М. : Просвящение, 1988.

3. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. - М. : Наука, 1978.

4. Батыгин, В. В. Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. - М. : Наука, 1970.

5. Алексеев, А. Н. Сборник задач по электродинамике / А. Н. Алексеев. - М. : Наука, 1970.

6. Ландау, Л. Д. Краткий курс теоретической физики / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - М. : Наука, 1978.

7. Матвеев, А. Н. Электродинамика и теория относительности / А. Н. Матвеев. - М. : Высшая школа, 1964.

8. Медведев, Б. В. Начала теоретической физики / Б. В. Медведев. - М. : Наука, 1977.

9. Эпп, В. Я. Задания для самостоятельной работы по курсу «Электродинамика» / В. Я. Эпп, Г. К. Разина. - Томск : Изд-во ТГПУ, 2002.

Учебное издание

Олеся Демидовна Азоркина
Владимир Яковлевич Эпп

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Методическое пособие

Редактор: М. Ф. Чертова
Ответственный за выпуск: Л. В. Домбраускайте

Печать: трафаретная	Сдано в печать: 28.12.2009
Бумага: офсетная	Формат: $60 \times 84/16$
Усл. печ. л: 2,8	Заказ: № 878 / у
Уч. изд. л.: 1,2	Тираж: 100 экз.

Издательство Томского государственного педагогическтго университета
634041, г. Томск, пр. Комсомольский, 75
Отпечатано в типографии Издательства ТГПУ,
г. Томск, ул. Герцена, 49. Тел. (3822)52-12-93
e-mail: publish@tspu.edu.ru