

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГПУ)

УТВЕРЖДАЮ

декан факультета
«30»  2011 года



ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.Ф.01.3 – Математическая логика и теория алгоритмов

Направление подготовки

230200.62 - Информационные системы

Степень (квалификация) –

Бакалавр информационных систем

1. Цели и задачи дисциплины

1.1. Цель преподавания дисциплины

Цель преподавания дисциплины – ознакомление студентов с основными приемами символической логики, используемыми при исследовании структуры математических знаний и с основными положениями формальной теории алгоритмов, включая теорию вычислимости, теорию эффективности.

1.2. Задачи изучения дисциплины

Задача изучения дисциплины – обобщить и систематизировать логические знания, полученные студентами при изучении других математических учебных дисциплин; углубить понимание семиотических средств математики, а также структуры доказательства и математической теории, понятия алгоритма; подготовить к работе с литературой по логике, овладение практическими навыками в области анализа эффективности алгоритмов и эффективного решения задач.

1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо для изучения данного курса

«Алгебра и геометрия», «Информатика».

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

- владеть и свободно оперировать терминологией алгебры логики, нечеткой логики, логики предикатов, теории алгоритмов, употреблять математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- знать основы построения правильного логического вывода на основе схем формализации суждений на естественном языке;
- получить углубленное представление о предикатах, как формальном средстве отображения математических утверждений и теорем;
- знать основы формальной теории алгоритмов и уметь применять их в практической разработке алгоритмов;
- получить практические навыки по выявлению алгоритмически неразрешимых, легко и трудно разрешимых проблем, оценки мер сложности алгоритмов.

3. Объем дисциплины и виды учебной работы:

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
Общая трудоемкость дисциплины	85	3			
Аудиторные занятия	36	36			
Лекции	18	18			
Практические занятия (ПЗ)					
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)	18	18			
И (или) другие виды аудиторных занятий					
Самостоятельная работа	49	49			
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
И (или) другие виды самостоятельной работы					
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	зачет	зачет			

4. Содержание дисциплины

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Разделы дисциплины	Лекции	Практические занятия или семинары	Лабораторные занятия
1	Элементы математической логики	4		4
2	Понятие алгоритма на интуитивном уровне.	2		
3	Практика анализа и верификации алгоритмов.	2		4
4	Формализация понятия алгоритма	4		
5	Элементы теории формальных языков	2		6
6	Элементы теории NP-полноты	4		4

4.2. Содержание разделов дисциплины

1. Элементы математической логики.

Логика высказываний (ЛВ) и булева алгебра. Приведение формул к КНФ (конъюнктивно-нормальная форма). Логическое следствие. Теоремы дедукции. Метод резолюции.

Логика предикатов первого порядка. Термы: переменные, константы, функторы. Понятие предиката. Кванторы. Стандартизация формул, ПНФ (предваренная нормальная форма). Подстановки и склейки. Метод резолюции в ЛППП (логика предикатов первого порядка).

Понятие о неклассических логиках.

2. Понятие алгоритма на интуитивном уровне.

Теоретическая информатика и информационные технологии. Интуитивное понятие алгоритма и его свойства. Меры эффективности алгоритма. Классы алгоритмов. Полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы.

3. Практика анализа и верификации алгоритмов.

Правила сложения и умножения. Рекуррентные теоремы о трудоемкости. Построение эффективных алгоритмов. Приемы «балансировка» и «разделяй и властвуй». Понятие о верификации. Математическая индукция и метод инварианта.

4. Формализация понятия алгоритма.

Неформальность интуитивного определения. Различные подходы к формализации: подходы Геделя, Черча, Тьюринга и Маркова. Тезис Черча-Тьюринга. Вычислимые функции. Машина Тьюринга (МТ). Построение МТ для задачи поиска наибольшего общего делителя (НОД). Меры эффективности работы МТ. Равнодоступная адресная машина (РАМ) как модель, приближенная к реальным вычислителям. МТ и РАМ. Понятие об универсальном алгоритме. Алгоритмическая неразрешимость. Эффективная нумерация программ. Теорема о параметризации. Диагональный метод. Лемма о неподвижной точке.

5. Элементы теории формальных языков.

Понятие языка и грамматики. Классификация по Хомскому. Связь алгоритмов и задач с грамматиками и языками. Конечные автоматы. Детерминированный конечный автомат (ДКА) и недетерминированный конечный автомат (НКА). Приведение НКА к ДКА. Моделирование ДКА и НКА. Анализ контекстно-свободных (КС) грамматик. Магазиновый автомат (МА).

6. Элементы теории NP-полноты.

Основные классы алгоритмов. Понятие недетерминированной МТ и недетерминированного алгоритма. Моделирование недетерминированного алгоритма. Классы NP и NP-спасе. Алгоритмическая сводимость. Понятие о NP-полной и NP-трудной задаче. Проблема NP-полноты (NP-question). NP-полнота задачи проверки выполнимости булевых формул. Схема доказательства NP-полноты. Примеры NP-полных и NP-трудных задач.

5. Лабораторный практикум

№п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Кол-во часов
1	1	Эквивалентные преобразования в ЛВ и ЛППП.	2
2	1	Метод резолюций в ЛВ и ЛППП.	2
3	3	Анализ простейших алгоритмов.	2
4	3	Анализ рекурсивных алгоритмов.	2
5	5	Моделирование НКА.	2
6	5	Описание формальных конструкций с помощью КС-грамматик.	4
7	6	Решение NP-полных задач.	4

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

6.1. Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. 2008.
2. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. 2008.

б) дополнительная литература

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. 2003.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. 2011.
3. Хопкрофт Дж., Раджив Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2008.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лабораторный практикум проводится в среде Free Pascal или на базе иного компилятора. По желанию студента возможно выполнение лабораторных работ на других языках программирования высокого уровня в других средах.

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

8.1. Методические рекомендации преподавателю

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов» является одним из базовых. Знания, полученные в рамках данной дисциплины, образуют фундаментальную основу для дальнейшего успешного освоения многих курсов, изучаемых студентами в дальнейшем, например, таких как «Алгоритмы и структуры данных», «Трансляция с языка высокого уровня», «Логическое программирование», «Технология программирования», «Вычислительная геометрия».

Преподаватель, читающий данный курс, в рамках лекционных и лабораторных занятий должен отразить перечень содержания разделов дисциплины.

При этом следует учитывать, что наиболее сложными разделами дисциплины являются 4, 5 и 6. При подготовке к изложению данных разделов целесообразно использовать не толь-

ко рекомендованную литературу (п. 6.1.), но и воспользоваться следующими материалами: 1) Мозговой М.В. Классика программирования: алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы. Практический подход. – СПб.: Наука и Техника, 2006. – 320 с. 2) Емельченков Е.П., Емельченков В.Е. Вычислимость. Введение в теорию алгоритмов. Лекция, 2000.

8.2. Методические рекомендации студенту

Студентам рекомендуется конспектировать лекции, структурируя материал и выделяя наиболее важные аспекты: определения, формулировки и доказательства теорем, формулы и т.п. Полезным будет разработка краткого справочника, содержащего определения важнейших понятий и наиболее часто употребляемые формулы дисциплины. Рекомендуется к каждой лекции и лабораторной работе разбирать предыдущий материал, отмечая на полях вопросы, вызывающие затруднения. Некоторые теоремы и положения выносятся на самостоятельное изучение, поэтому в конспекте лекций необходимо оставить место для освещения упомянутых вопросов.

На лабораторных занятиях подробно рассматриваются основные вопросы дисциплины, отрабатываются и реализуются некоторые задачи на языке программирования высокого уровня, при этом при возникновении проблем рекомендуется повторить материал дисциплины «Программирование».

Перечень заданий для самостоятельной работы

Задание 1.

Построить таблицу истинности для формул:

$$1) (X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X); 2) (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y) \wedge X.$$

Задание 2.

Преобразуйте формулу равносильным образом так, чтобы она содержала только операции \wedge, \neg, \vee : $(X \rightarrow (Y \leftrightarrow Z)) \rightarrow Z$.

Задание 3.

Используя определение логического следования, выясните, является ли формула $\neg X \wedge Z$ логическим следствием формул $\neg X, Z, X \rightarrow Z$.

Задание 4.

Представить рассуждения в виде формул логики высказываний и ответить на вопросы.

1) Является ли следующее рассуждение истинным:

«Если (профсоюзы поддержат президента на предстоящих выборах |P), то (он подпишет законопроект о повышении заработной платы $\frac{1}{2}Q$). Если (фермеры окажут президенту поддержку $\frac{1}{2}R$), то (он наложит вето на законопроект $\frac{1}{2}S$). Очевидно, что он не подпишет законопроект или не наложит на него вето. Следовательно, президент потеряет голоса профсоюзов или голоса фермеров».

2) Является ли следующее рассуждение истинным:

«(В бюджете возникнет дефицит |P), если не (повысят пошлины |Q). Или если в бюджете будет дефицит, то (социальные расходы сократятся |R), из чего следует, что если повысят пошлины, то социальные расходы не сократятся».

Задание 5.

Докажите методом резолюции:

Дано: $p \rightarrow q$

$q \rightarrow f$

Доказать: $p \rightarrow f$

Задание 6.

Записать на языке предикатов следующие высказывания.

1. Если произведение двух действительных чисел меньше нуля, то один из множителей отрицателен.
2. Натуральное число, которое делится на 9, разделится на 3.
3. Для любого натурального числа есть превосходящее его натуральное число.
Не существует натурального числа, которое меньше единицы.

Задание 7.

Приведите схему резолютивного вывода:

Аксиома 1. Мао Цзедун – человек.

Аксиома 2. Все люди смертны.

Теорема. Мао Цзедун – смертен.

Задание 8.

Оценить время выполнения $T(n)$ следующих фрагментов программ:

<pre>i:=2; j:=3; n:=i+j;</pre>
<pre>max:=1; for i:=2 to n do if A[i]<A[max] then max:=i;</pre>
<pre>for i:=1 to n do begin min:=i; for j:=i+1 to n do if A[j]<A[min] then min:=j; x:=A[i]; A[i]:=A[min]; A[min]:=x End</pre>
<pre>for i:=1 to n do A[i, i]:=1; for m:=1 to n do for i:=1 to n do for j:=1 to n do A[i, j]:=A[i, j] ∨ (A[i, m] ∧ A[m, j])</pre>
<pre>a:=1; b:=n; i:=(a+b) div 2; while A[i] <> x do if x < A[i] then begin b:=i-1; i:=(a+b) div 2 end else begin a:=i+1; i:=(a+b) div 2 end;</pre>
<pre>procedure sift(l,r: integer); begin i:=l;</pre>


```

j:=2*l;
x:=A[l];
if (j<r)and(A[j]<A[j+1]) then inc(j);
while (j<=r)and(x<A[j]) do begin
  A[l]:=A[j];
  A[j]:=x;
  i:=j;
  j:=2*j;
  if (j<r)and(A[j]<A[j+1]) then inc(j)
end
end;
.....
begin
  l:=(n div 2)+1;
  r:=n;
  while l>1 do begin
    dec(l);
    sift(l,n)
  end;
  while r>1 do begin
    x:=A[1];
    A[1]:=A[r];
    A[r]:=x;
    dec(r);
    sift(1,r)
  end
end
k:=5;
while true do begin
  for i:=1 to n do for j:=1 to m do begin
    A[i, j]:=k;
    if i<j then A[i, j]:=k*2
  end
end
n:=5;
for k:=1 to n do for j:=1 to i do begin
  A[k, j]:=n;
  if k<j then A[k, j]:=n*2
end

```

Задание 9.

Обозначим как Z_0 множество всех неотрицательных целых чисел.

Описать машины Тьюринга, которые реализуют:

1. Счетчик четности. Выход машины Тьюринга равен 0 или 1 в зависимости от того, четно или нечетно число единиц в последовательности из 0 и 1, записанной на ленте машины Тьюринга. В конце последовательности стоит символ B . В начальном состоянии головка видит первый левый символ.
2. Инверсию заданного слова в алфавите $\{0, 1\}$ (0 заменяет на 1, а 1 – на 0).
3. «Переворачивание» заданного слова в алфавите $\{a, b, c\}$.
4. Сложение двух чисел из N_0 , данных в двоичной системе счисления.

Задание 10.

В алфавите $A = \{a, b\}$ описать нормальный алгоритм, который выдает в качестве результата пустое слово, если буквы a и b входят во входное слово в равном количестве, и любое непустое слово – иначе. В алгоритме должно быть не более четырех правил подстановки. Докажите правильность придуманного алгоритма.


Перечень вопросов к зачету

1. Логические операторы. Таблицы истинности.
2. Булева алгебра.
3. Метод резолюции в логике высказываний.
4. Логика предикатов первого порядка (ЛППП): понятие предиката, атома, формулы, интерпретация формул, логическое следование.
5. Преобразования формул в ЛППП.
6. Метод резолюции в ЛППП. Полнота резолютивного вывода. Стратегии проведения резолюций.
7. Понятие теоретической информатики и роль теории алгоритмов в ней. Методологическая основа теории алгоритмов.
8. Интуитивное определение алгоритма и трудоемкостей. Сравнение алгоритмов по временной сложности. Асимптотический порядок сложности.
9. Сравнение алгоритмов различных классов. Экспоненциальные и полиномиальные алгоритмы. Сложность задачи.
10. Оценка трудоемкости. Рекуррентные теоремы.
11. Правила сложения и умножения трудоемкостей при анализе алгоритмов.
12. Основные формы представления алгоритмов.
13. Понятие о верификации. Метод инварианта.
14. Неформальность интуитивного определения алгоритма. Различные подходы к формализации.
15. Понятие о детерминированной машине Тьюринга. Описание МТ. Мгновенные описания МТ.
16. Построение МТ для задачи поиска НОД.
17. Определения трудоемкостей по Тьюрингу. Понятие об универсальной МТ. Алгоритмически неразрешимые задачи. Примеры.
18. Вычислимые функции, как форма представления алгоритма.
19. Основные понятия теории формальных языков. Алфавит, язык, порождающие грамматики.
20. Классификация языков и грамматик по Хомскому. Зависимость трудоемкости распознавания от класса языка.
21. Понятие конечного автомата. Построение таблицы переходов КА по автоматной грамматике. ДКА и НКА. Граф переходов КА.
22. Устранение недетерминированности КА.
23. Моделирование простейшего НКА (бинарный алфавит).
24. Регулярные выражения и регулярные множества. Эквивалентность понятий автоматного и регулярного языка.
25. Запись КС-грамматик в форме Бэкуса-Науэра на примере описания синтаксиса алгоритмического языка.
26. МА: Понятие МА, мгновенные описания, граф переходов.
27. Классы алгоритмов и задач P и P-space. Понятие НМТ. Классы NP и NP-space.
28. Запись недетерминированного алгоритма на обобщенном паскале. Моделирование недетерминированного алгоритма детерминированным. Предмет теории NP-полноты.
29. Соотношения между различными классами в теории алгоритмов и теории формальных языков. Связь между языками и алгоритмами.
30. NP-question. Основные возможности разрешения данной проблемы.
31. Трудно-решаемые задачи. Задача коммивояжера (в оптимизационной постановке), как пример.
32. Понятие полиномиальной сводимости и NP-полноты. Схеме доказательства NP-полноты. Задача b-коммивояжера, как пример NP-полной задачи.


Программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению **230200.62 – Информационные системы**, степень (квалификация) - **бакалавр информационных систем**

Программу составил:

Ст. преподаватель кафедры информатики

 Долганова Н. Ф.

Программа дисциплины утверждена на заседании кафедры информатики протокол № 1 от «30» августа 2011 г.

Зав. кафедрой, доцент  А.Н. Макаренко

Программа дисциплины одобрена методической комиссией физико-математического факультета ТГПУ

Председатель

методической комиссии физико-математического факультета  Г.К. Разина