

481

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ТГПУ)**

«УТВЕРЖДАЮ»

Декан ФМФ

А.Н.Макаренко

« 31 » *августа* 2009 года

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**ДШ.Ф.07 ГЕОМЕТРИЯ**

Специальность **050201.65 Математика**

Квалификация – **учитель математики**

## 1. Цели и задачи дисциплины

### Цель:

- Обеспечить формирование того аспекта математической культуры студента педагогического ВУЗа, который определяется наглядностью и абстрактностью геометрических понятий и дедуктивной строгостью выводов геометрии.
- Сформировать представление о профессиональной направленности геометрической подготовки будущего учителя математики.

### Задачи:

- Изучить элементы векторной алгебры;
- сформировать представление об универсальности метода координат на плоскости и в пространстве;
- сформировать представление о групповой и структурной точке зрения на геометрию;
- исследовать геометрию многомерных пространств;
- сформировать представление об основных понятиях общей топологии;
- изучить теорию линий и поверхностей евклидова пространства;
- исследовать геометрию проективных пространств;
- изучить методы геометрических построений на плоскости;
- рассмотреть методы изображений;
- обсудить вопросы измерения геометрических величин;
- провести исторический обзор обоснования геометрии;
- рассмотреть общие вопросы аксиоматики.

## 2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения курса "Геометрия" студент должен овладеть геометрической культурой, соответствующей уровню подготовки современного учителя математики, которая включает следующие знания и умения по геометрии:

- свободное оперирование основными понятиями геометрии: вектор, линия, поверхность, геометрическое преобразование, многомерное пространство и др.
- владение векторным и координатным методами исследования на плоскости и в пространстве;
- знание различных групп преобразований плоскости и пространства и умение пользоваться этими преобразованиями при решении задач на вычисление, доказательство и построение;
- представление о различных путях построения геометрии;
- знание основных исторических сведений и главных направлений развития геометрии;
- владение основными фактами геометрии плоскости Лобачевского;
- знание определения и примеров основных объектов исследования общей топологии;
- знание основных свойств линий и поверхностей в евклидовом пространстве;
- знание основных понятий проективной геометрии;
- знание основных понятий теории измерения геометрических величин;
- знание общих вопросов аксиоматики;
- умение применять полученные знания по курсу "Геометрия" при изучении других математических дисциплин, а также в школьном курсе математики.

### 3. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 2	Семестр 3	Семестр 4	Семестр 5
Общая трудоёмкость дисциплины	558	140	138	140	140
Аудиторные занятия	288	72	72	72	72
Лекции	144	36	36	36	36
Практические занятия	144	36	36	36	36
Семинары					
Лабораторные работы					
Другие виды занятий					
Самостоятельная работа	270	68	66	68	68
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы					
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		экзамен	зачет	экзамен	экзамен

### 4. Содержание дисциплины

#### 4.1. Разделы дисциплины и виды занятий (Тематический план)

№	Раздел дисциплины	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
	<b><i>Второй семестр</i></b>			
1.	Элементы векторной алгебры	14	14	14
2.	Метод координат на плоскости и пространстве	4	4	8
3.	Прямая линия на плоскости	6	8	12
4.	Плоскость в пространстве	6	5	13
5.	Прямая в пространстве	6	5	13
	<b><i>Третий семестр</i></b>			
6.	Кривые второго порядка	10	8	16
7.	Поверхности второго порядка	8	10	16
8.	Преобразования плоскости и пространства	8	10	16
9.	Элементы топологии	10	8	12
	<b><i>Четвертый семестр</i></b>			
10.	Линии в евклидовом пространстве	10	14	25
11.	Поверхности в евклидовом пространстве	16	14	25
12.	Элементы многомерной геометрии	10	8	25
	<b><i>Пятый семестр</i></b>			
13.	Проективное пространство	8	8	10
14.	Геометрия проективной плоскости	8	10	12
15.	Геометрические построения на плоскости	-	14	10
16.	Методы изображений	-	4	10
17.	Исторический обзор обоснования геометрии	12	-	10

18.	Общие вопросы аксиоматики	4	-	15
19.	Измерение геометрических величин	4	-	8

## 4.2. Содержание разделов дисциплины

### 1. Элементы векторной алгебры.

*Векторы. Линейные операции над векторами.* Направленный отрезок. Равенство направленных отрезков. Вектор (свободный вектор). Сложение векторов и его свойства. Умножение вектора на число и его свойства. Понятие векторного (линейного) пространства и подпространства.

*Линейная зависимость векторов.* Понятие линейно зависимой системы векторов. Исследование системы векторов с точки зрения линейной зависимости. Линейная зависимость и коллинеарность векторов. Линейная зависимость и компланарность векторов.

*Базис и координаты вектора.* Понятие базиса и размерности векторного пространства. Аффинный и ортонормированный базисы. Координаты вектора и их свойства. Ориентация векторного пространства.

*Скалярное произведение векторов.* Проекция вектора на ось и ее свойства. Определение скалярного произведения. Геометрические и алгебраические свойства скалярного произведения. Выражение скалярного произведения векторов в координатах.

*Векторное произведение векторов.* Определение векторного произведения. Геометрические и алгебраические свойства векторного произведения векторов. Выражение векторного произведения векторов в координатах.

*Смешанное произведение векторов и его свойства.* Определение смешанного произведения векторов. Вычисление объема параллелепипеда. Смешанное произведение и компланарность векторов. Выражение смешанного произведения векторов в координатах.

*Приложение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов к решению задач школьного курса геометрии.*

### 2. Метод координат на плоскости и в пространстве.

*Аффинная и прямоугольная декартова системы координат на плоскости и в пространстве.* Деление отрезка в данном отношении. Расстояние между двумя точками.

*Преобразование координат. Ориентация.* Ориентация плоскости и пространства. Преобразование аффинных и прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве.

*Полярные, сферические и цилиндрические координаты.*

*Уравнение и геометрические образы.* Алгебраические линии. Алгебраические поверхности.

### 3. Прямая линия на плоскости

*Различные способы задания прямой на плоскости.* Задание прямой: точкой и направляющим вектором, двумя точками, отрезками. Общее уравнение прямой и его исследование. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых.

*Метрические задачи теории прямой на плоскости.* Задание прямой точкой и нормальным вектором. Нормированное уравнение прямой. Вычисление отклонения и расстояния точки от прямой, вычисление величины угла между двумя прямыми на плоскости.

#### 4. Плоскость в пространстве

*Различные способы задания плоскости в пространстве.* Задание плоскости: точкой и двумя векторами, тремя точками, отрезками. Общее уравнение плоскости и его исследование. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Связка плоскостей.

*Метрические задачи.* Задание плоскости точкой и вектором нормали. Нормированное уравнение плоскости. Вычисление отклонения и расстояния от точки до плоскости. Вычисление расстояния между плоскостями. Вычисления угла между плоскостями.

#### 5. Прямая в пространстве

*Различные способы задания прямой в пространстве.* Задание прямой: точкой и направляющим вектором, двумя точками, двумя плоскостями. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

*Метрические задачи.* Вычисление угла: между прямой и плоскостью, между двумя прямыми. Вычисление расстояния от точки до прямой. Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми.

#### 6. Кривые второго порядка

*Эллипс, гипербола и парабола.* Уравнения и свойства конических сечений. Уравнения конических сечений в полярных координатах. Из истории конических сечений.

*Общее уравнение кривой второго порядка и его исследование.* Приведение общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду. Классификация кривых 2-го порядка.

#### 7. Поверхности 2-го порядка

*Цилиндрические и конические поверхности 2-го порядка.* Определение и уравнение цилиндрической поверхности в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат. Определение и уравнение конической поверхности в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат. Конические сечения.

*Изучение поверхностей 2-го порядка по их каноническим уравнениям.* Эллипсоид. Однополостный и двуполостный гиперboloиды. Эллиптический и гиперболический параболоиды. Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка.

#### 8. Преобразование плоскости и пространства

*Понятие преобразования множества.* Примеры преобразований плоскости. Движения плоскости и их свойства. Группа движений плоскости. Классификация движений плоскости. Преобразование подобия плоскости. Гомотетия плоскости и ее свойства. Группа подобий плоскости.

*Аффинные преобразования плоскости и их свойства.* Определение, примеры и свойства аффинных преобразований плоскости. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы. Преобразования пространства. Групповой подход к геометрии.

#### 9. Элементы многомерной геометрии

*Аффинное  $n$ -мерное пространство.* Система аксиом Вейля аффинного пространства  $A_n$  и её простейшие следствия. Понятие  $k$ -плоскости в аффинном пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве. Аффинные преобразования пространства  $A_n$ . Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

*Евклидово  $n$ -мерное пространство.* Определение евклидова пространства  $E_n$ . Расстояние между двумя точками. Угол между векторами. Движение евклидова

пространства  $E_n$ . Группа движений и ее подгруппы. Группа подобий и ее подгруппы. Групповой подход к геометрии.

*Квадратичные формы и квадратики* в многомерном пространстве. Приведение квадратичной функции к каноническому виду. Квадратики в аффинном пространстве  $A_n$ . Квадратики в евклидовом пространстве  $E_n$ .

#### **10. Элементы топологии**

*Топологические пространства. Многообразия.*

Определение и примеры топологических пространств. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Топологические окрестности и их свойства. Различные определения топологического пространства.

Метрические пространства. Топология, индуцированная метрикой. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы. Отделимость, компактность, связность топологических пространств. Многообразия. Топологические свойства листа Мебиуса и проективной плоскости.

#### **11. Линии в евклидовом пространстве**

*Вектор-функция скалярного аргумента.* Определение и примеры вектор - функций одного скалярного аргумента. Предел, непрерывность и дифференцируемость вектор - функций. Формула Тейлора.

*Понятие линии в евклидовом пространстве.* Элементарная линия. Понятие общей линии, простой линии. Параметрические уравнения линии. Гладкие и регулярные линии. Допустимое изменение параметра. Натуральная параметризация линии. Длина дуги.

*Прямые и плоскости, ассоциированные с линией в евклидовом пространстве.* Касательная и ее уравнение. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и бинормаль линии. Спрямяющая плоскость.

*Сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение.* Ортогональный подвижной репер. Репер Френе и его инварианты. Вычислительные формулы кривизны и кручения. Натуральные уравнения. Классы линий.

#### **12. Поверхности в евклидовом пространстве**

*Понятие поверхности в евклидовом пространстве.* Элементарная поверхность. Понятие общей поверхности, простой поверхности. Уравнение поверхности. Гладкие и регулярные поверхности.

*Касательная плоскость и нормаль поверхности.* Уравнения касательной плоскости и нормали для различных способов задания поверхности.

*Первая квадратичная форма поверхности.* Вычисление длины дуги линии на поверхности. Вычисление угла между линиями на поверхности. Вычисление площади области на поверхности.

*Кривизна линии на поверхности.* Вторая квадратичная форма поверхности. Индикатриса Дюпена. Классификация точек поверхности.

*Кривизна поверхности.* Главные кривизны и главные направления. Полная и средняя кривизна поверхности. Поверхности постоянной кривизны. Линии кривизны и асимптотические линии поверхности.

*Основные уравнения теории поверхностей.* Подвижной репер поверхности и его деривационные формулы. Формулы Петерсона- Кодацци. Теорема Гаусса о полной кривизне поверхности.

*Внутренняя геометрия поверхности.* Геодезическая кривизна линии на поверхности. Геодезические линии и их свойства. Изометричные поверхности. Изгибание поверхностей.

### **13. Проективное пространство**

*Понятие проективного пространства.* Определение  $n$ -мерного проективного пространства. Модели проективной прямой и проективной плоскости. Простейшие свойства двумерного и трехмерного проективных пространств.

*Проективные координаты.* Проективный репер. Проективные координаты точек. Преобразование проективных координат.

*Прямая на проективной плоскости.* Параметрические уравнения прямой. Общее уравнение прямой. Принцип двойственности. Теорема Дезарга и ее частные случаи на расширенной плоскости.

*Проективные отображения и проективные преобразования.* Определение и свойства проективных отображений. Перспективные отображения. Проективные преобразования плоскости. Группа проективных преобразований.

### **14. Геометрия проективной плоскости**

*Сложное отношение и его свойства.* Полный четырехвершинник и его свойства. Построение 4-й гармонической точки (прямой) к трем заданным точкам (прямым) одной прямой (пучка).

*Кривые второго порядка на проективной плоскости.* Независимость определения кривой от выбора проективного репера. Приведение уравнения кривой к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.

Взаимное расположение прямой и кривой 2-го порядка. Сопряженность точек относительно кривой. Поляра, полюс, поляритет. Теоремы Паскаля и Бриансона.

Задачи школьного курса геометрии на расширенной плоскости.

*Геометрия проективной плоскости с фиксированной прямой.*

### **15. Геометрические построения на плоскости**

*Элементы конструктивной геометрии.* Система аксиом построения с помощью циркуля и линейки. Основные построения на плоскости. Решение задач на построение методом пересечений. Решение задач на построение методом преобразований. Алгебраический метод решения задач на построение.

### **16. Методы изображений**

*Основные вопросы теории изображений.* Центральное и параллельное проектирование. Изображение фигур в параллельной проекции. Аксонометрия. Позиционные задачи. Метрические задачи.

### **17. Исторический обзор обоснования геометрии**

*Этапы развития геометрии.* Геометрия до Евклида. "Начала" Евклида и их критика. Пятый постулат Евклида и его эквиваленты. Открытие неевклидовой геометрии. Возникновение современной аксиоматики евклидовой геометрии. Система аксиом Гильберта.

*Аксиома Лобачевского и её простейшие следствия.* Некоторые факты геометрии плоскости Лобачевского. Определение и свойства параллельных и расходящихся прямых. Угол параллельности и функция Лобачевского. Окружность, эквидистанта и орицикл.

### **18. Общие вопросы аксиоматики**

*Понятие о математической структуре.* Примеры некоторых математических структур. Интерпретации системы аксиом. Непротиворечивость, независимость, полнота

системы аксиом. Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Аксиоматика школьного курса геометрии.

### **19. Измерение геометрических величин**

*Длина. Площадь. Объем.* Измерение отрезков. Теорема существования и единственности. Площадь многоугольника. Равновеликие и равносторонние многоугольники. Квадрируемость плоских фигур. Объем многогранника в евклидовом пространстве (обзор). О величинах.

## **5. Лабораторный практикум.**

Не предусмотрен.

## **6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.**

### **6.1. Рекомендованная литература.**

*Основная литература:*

1. Жафяров, А. Ж. Геометрия: Учебное пособие для вузов: В 2 ч. / А.Ж. Жафяров. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2002-2003.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2007. – 307 с.
3. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

*Дополнительная литература:*

1. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. – М.: Издательство МГУ, 2002. – 319 с.
2. Кузютин, В. Ф. Геометрия: Учебник для вузов / В. Ф. Кузютин, Н. А. Зенкевич, В. Еремеев – СПб.: Лань, 2003. – 415 с.
3. Степанов, Н.А. Геометрия: учебное пособие для педагогических вузов / Н.А. Степанов, Т.Б. Жогова, О.В. Казнина. – Нижний Новгород: издательство Нижегородского государственного педагогического университета, 2007. – 313 с.
4. Шаров, Г.С. Задачи по курсу дифференциальной геометрии и топологии : Сборник задач по дифференциальной геометрии : учебное пособие для вузов / Г.С. Шаров, А.М. Шелехов, М.А. Шестакова. – М.: издательство МЦНМО, 2005. – 112 с.
5. Атанасян, Л.С. Геометрия : учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов : в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986-1987.

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Не предусмотрено

## **8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.**

*8.1. Примерный перечень контрольных вопросов и тематики заданий для самостоятельной работы:*

1. Использование линейных операций и скалярного, векторного, смешанного произведений векторов для решения задач элементарной геометрии.
2. Использование уравнений прямой и плоскости для решения задач элементарной геометрии.
3. Определение, каноническое уравнение и свойства эллипса (гиперболы, параболы).



4. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы.
5. Приведение общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду.
6. Классификация кривых 2-го порядка.
7. Исследование поверхности второго порядка по каноническому уравнению.
8. Определение и уравнение поверхности вращения.
9. Определение, примеры и канонические формулы частных видов движения плоскости.
10. Классификация движений плоскости.
11. Разложение движения плоскости в композицию осевых симметрий.
12. Группа движений плоскости и её подгруппы.
13. Применение свойств движений и подобий для решения задач элементарной геометрии.
14. Система аксиом Вейля аффинного пространства  $A_n$  и ее простейшие следствия.
15. Исследование взаимного расположения  $k$ -мерных плоскостей в аффинном пространстве  $A_n$ .
16. Группа движений евклидова пространства  $E_n$  и ее подгруппы.

#### 8.2. Примерный перечень вопросов к зачету и экзамену:

##### 2 семестр

1. Понятие свободного вектора.
2. Определение и свойства линейных операций над векторами.
3. Линейная зависимость векторов. Теоремы о линейной зависимости системы векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.
4. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех векторов.
5. Проекция вектора на ось и ее свойства. Ортогональная проекция вектора на ось.
6. Определение и свойства скалярного произведения векторов. Скалярное произведение и ортогональность векторов. Выражение скалярного произведения в координатах. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
7. Определение и свойства векторного произведения векторов. Векторное произведение и коллинеарность векторов. Выражение векторного произведения в координатах.
8. Определение и свойства смешанного произведения векторов. Смешанное произведение и компланарность векторов. Выражение смешанного произведения в координатах.
9. Аффинная система координат на плоскости. Деление отрезка в данном отношении. Прямоугольная декартова система координат на плоскости. Расстояние между двумя точками. Полярные координаты.
10. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование.
11. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми.
12. Аффинная система координат в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Расстояние между двумя точками.
13. Общее уравнение плоскости и его исследование.
14. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Угол между двумя плоскостями.
15. Задание прямой в пространстве: точкой и направляющим вектором; двумя точками; двумя плоскостями.
16. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.

##### 3 семестр

1. Эллипс. Вывод уравнения, свойства эллипса.
2. Гипербола. Вывод уравнения, свойства.

3. Парабола. Вывод уравнения, свойства параболы.
4. Определение и уравнение цилиндрической поверхности в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат.
5. Определение и уравнение конической поверхности в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат.
6. Эллипсоид. Вывод уравнения, свойства.
7. Однополостный и двуполостный гиперboloиды.
8. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
9. Движения плоскости и их свойства.
10. Преобразование подобия плоскости.
11. Гомотетия плоскости и ее свойства.
12. Определение, примеры и свойства аффинных преобразований плоскости.
13. Система аксиом Вейля аффинного пространства  $A_n$  и её простейшие следствия.
14. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве.
15. Определение евклидова пространства  $E_n$ .
16. Аффинные преобразования пространства  $A_n$ .

*4 семестр*

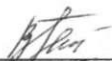
1. Понятие линии в евклидовом пространстве.
2. Касательная и ее уравнение.
3. Соприкасающаяся плоскость
4. Главная нормаль и бинормаль.
5. Спрямяющая плоскость.
6. Репер Френе и его инварианты.
7. Геометрический смысл кривизны и кручения.
8. Натуральные уравнения линии. Классы линий.
9. Понятие поверхности в евклидовом пространстве.
10. Касательная плоскость и нормаль поверхности.
11. Вычисление угла между линиями на поверхности.
12. Кривизна линии на поверхности.
13. Индикатриса Дюпена и ее уравнение.
14. Классификация точек поверхности.
15. Полная и средняя кривизна.
16. Линии кривизны на поверхности.
17. Подвижной репер поверхности и его деривационные формулы.
18. Теорема Гаусса о полной кривизне поверхности.

*5 семестр*

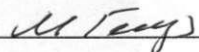
1. Понятие проективного пространства. Модели проективной прямой (проективной плоскости).
2. Проективный репер. Проективные координаты точек.
3. Прямая на проективной плоскости.
4. Теорема Дезарга.
5. Частные случаи теоремы Дезарга на расширенной плоскости.
6. Полный четырехвершинник и его свойства.
7. Кривые второго порядка на проективной плоскости  $P_2$ .
8. Полус и поляра. Поляритет.
9. Пятый постулат Евклида и его эквиваленты.
10. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского.
11. Требования, предъявляемые к системе аксиом.
12. Непротиворечивость, независимость, полнота системы аксиом.
13. Измерение отрезков.
14. Равновеликие и равносоставленные многоугольники.
15. Квадрируемость плоских фигур.

Программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности **050201.65 Математика.**

Программу составил:

К.ф.-м. н., доцент кафедры математики,  
теории и методики обучения математике  В.А. Панчицина

Программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математики, теории и методики обучения математике, протокол № 1 от «31» августа 2009 г.

Заведующий кафедрой, профессор  Э.Г. Гельфман

Программа дисциплины одобрена методической комиссией ФМФ ТГПУ.

Председатель метод. комиссии

физико-математического факультета  В.И. Шижковский