МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГПУ)

«УТВЕРЖДАЮ»
декан физико-математического факультета
_____________ А.Н. Макаренко
«_30_» _08_______ 2011 г.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ДПП.Ф.03 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Специальность: **050201.65 Математика**

Квалификация специалиста – **учитель математики**

Пояснительная записка

Изучение на современном уровне ряда разделов математического анализа (теория вероятностей, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление) требует знания теории функций действительного переменного. ТФДП в настоящее время изучается в педагогических вузах как самостоятельная дисциплина, хотя в учебной литературе по математическому анализу существует также тенденция включать этот раздел математики в общие курсы математического или функционального анализа, например, П.П. Коровкин. – Математический анализ. Ч.1-2. – М.: Просвещение, 1972 или А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1978.

Сущность ТФДП состоит в том, что ряд понятий и методов из элементарных глав математического анализа (и смежных областей алгебры и геометрии) переносится на объекты более общей и сложной природы, причём широко используя при этом геометрические и алгебраические методы. Такой подход, связанный с обобщением основных понятий анализа, позволяет подходить с единой точки зрения к вопросам, ранее рассматривавшимся изолированно в специальных дисциплинах, устанавливать связи между, казалось бы, далекими математическими теориями и тем самым способствовать открытию новых математических фактов.

Характерным для ТФДП является не только обобщение, но и геометризация основных понятий и методов классического анализа. Функции тех или иных классов рассматриваются как точки или векторы "функциональных пространств". Введение абстрактных пространств позволило трактовать многие вопросы анализа в терминах геометрии. Многие факты при этом были угаданы по аналогии с фактами n-мерной геометрии, доказательства многих других были получены геометрическим путем.

В настоящем курсе излагаются лишь начальные сведения из ТФДП: элементы теории множеств и мощность множеств; абстрактные пространства и их структура; обобщение понятия функции – отображение; мера и интеграл Лебега. Целью курса при этом является научное обоснование и развитие понятий, первое представление о которых дается в школе и в курсе классического математического анализа. В качестве приложений общей теории рассматриваются задача о "неподвижной" точке отображения и обобщение интеграла, данное Лебегом.

Отличительной чертой данного курса ТФДП является его теоретическая направленность. Программа курса (162 часа) предусматривает чтение лекций (36 часов) и проведение практических занятий (36 часов), на самостоятельную работу студентов отводится 90 часов.

1. Цели и задачи дисциплины

Дисциплина "Теория функций действительного переменного" знакомит студентов ФМФ с современным состоянием математики в области измеримости множеств, функций и их интегрирования. Она непосредственно связана с курсами математического анализа, дифференциальных уравнений и теорией функций комплексного переменного.

Основные понятия и методы теории функций действительного переменного должны быть в настоящее время необходимым элементом образования любого школьного учителя старших классов. Научно-технический прогресс ставит перед школьным педагогом трудную задачу не только прекрасно владеть основными понятиями школьной математики, но и понимать их место в современной математике, знать их происхождение, развитие и использование в различных областях естествознания.

Поэтому данный курс ставит себе целью показать происхождение и развитие таких фундаментальных понятий математики как число, множество, функция, а также познакомить студентов с современной теорией множеств, теорией меры и интеграла, играющих огромную роль в различных областях математики.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

— знать и уметь доказывать основные теоремы курса;

— Знать, что такое конечное, счетное и несчетное множества. Уметь строить примеры указанных множеств.

— Уметь устанавливать взаимнооднозначное соответствие между двумя отрезками, отрезком и интервалом, интервалом и прямой, сферой и плоскостью, двумя кругами (находящимися на плоскости и в пространстве).

— Знать, чему равны мощности основных множеств: множества рациональных чисел, множества точек отрезка $[0,1]$, прямой - R^1, плоскостью - R^2 и т.д. Уметь построить множество, мощность которого больше мощности заданного множества.

— Уметь строить открытые, замкнутые, совершенные множества на прямой и на плоскости. Иметь представление о фракталах.

— Понимать отличие меры Жордана от меры Лебега. В частности, уметь построить множество, измеримое по Жордану и неизмеримое по Лебегу.

— Понимать отличие интеграла Римана от интеграла Лебега. В частности, уметь строить функции, интегрируемые по Лебегу и неинтегрируемые по Риману.

— Уметь разложить «простейшие» функции в тригонометрический ряд Фурье.

— Уметь оперировать с метрическими, евклидовыми, нормированными пространствами, в частности, знать взаимосвязь этих пространств и уметь построить любое из указанных пространств. Знать классические пространства (R^n, $C(|a,b|)$, $CL_2(|a,b|)$, l_p, $1 \le p \le \infty$).

3. Объём дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		3	4	5	6
Общая трудоемкость дисциплины	162			**162**	
Аудиторные занятия	72			**72**	
Лекции	36			**36**	
Практические занятия (ПЗ)	36			**36**	
Семинары					
Лабораторные работы					
Другие виды аудиторных занятий					
Самостоятельная работа (СР)	90			**90**	
Курсовые работы					
Расчетно-графические работы					
Рефераты					
Другие виды самостоятельной работы					
Вид итогового контроля				**Экз.**	

4. Содержание дисциплины

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план)

5 семестр

№ п/п	Разделы дисциплины	Лекции	ПЗ	СР
1	Элементы теории множеств.	**6**	**6**	
2	Пространства.	**6**	**6**	
3	Сходимость в метрических пространствах.	**4**	**6**	

4	Отображения и их операторы.	**6**	6	
5	Мера и измеримые множества.	**8**	6	
6	Интеграл Лебега и его свойства.	**6**	6	

4.2. Содержание разделов дисциплины

1. Элементы теории множеств: множества и их мощность; счетные множества и их свойства; множества мощности континуума и их свойства; множество вещественных чисел; теоремы о мощности промежуточного множества и множестве сколь угодно большой мощности.
2. Пространства: метрические пространства, метрика и норма, примеры. Геометрия пространств: открытые и замкнутые множества и их структура и свойства. примеры.
3. Сходимость в метрических пространствах, фундаментальные последовательности и полные пространства, плотные множества и теорема о вложенных шарах.
4. Отображения и их операторы, непрерывные отображения, сжимающие отображения и их неподвижные точки, принцип сжимающих отображений. Теоремы "существования и единственности".
5. Мера и измеримые множества. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства.
6. Интеграл Лебега и его свойства. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

5. Лабораторный практикум, практические занятия (семинары)

1. Множества и их мощность. Сравнение мощностей.
2. Множества и метрики, множества и нормы, множества и скалярные произведения. Пространства и множества. Примеры.
3. Последовательности элементов в метрическом пространстве, предел последовательности в метрических пространствах, сходимость. Примеры.
4. Функции, функционалы, операторы в метрических пространствах. Непрерывность. Линейные функционалы и операторы. Сжимающие отображения.
5. Мера множеств. Измеримые множества и функции.
6. Интегралы Римана, Стилтьеса, Лебега, их свойства.

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Рекомендованная литература
Основная литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие для вузов/ И.П. Натансон – М.: Наука, 2005. – 315с.
2. Ульянов П.Л. – Действительный анализ в задачах: учебное пособие для вузов/П.Л.Ульянов [и др.]. – М.: Физматлит, 2005. – 264с.

Дополнительная литература

1. Макаров Б. Избранные задачи по вещественному анализу: учебное пособие для вузов/Б.Макаров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 311с.
2. Бурбаки Н. Теория множеств: учебник для вузов/ Н. Бурбаки – М.: Мир, 1965-281с.
3. Брудно А.Л. Теория функций действительного переменного: учебное пособие для вузов/А.Л. Брудно. - М.: Наука, 1971. – 308с.
4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ: учебник для вузов/В.З. Вулих. – М.: Наука, 1967.- 279с.

5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для вузов/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1983. – 324с.
6. Очан Ю.С. Сборник задач по теории функций действительного переменного/ Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1983. – 298с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс/ Г.Е.Шилов - М.: Физматгиз, 1965.- 415с.

6.2. Средства обеспечения освоения дисциплины
Не предусмотрены.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины
Учебно-методические разработки кафедры.

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

8.1. Для преподавателей:
Необходимо сделать акцент на вопросах, ближе всего стоящих к профессиональным интересам студентов.

Лекция – главное звено дидактического цикла обучения. Её цель – формирование у студентов ориентировочной основы для последующего усвоения материала методом самостоятельной работы. Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;
- логичность, четкость и ясность в изложении материала;
- возможность проблемного изложения, дискуссии, диалога с целью активизации деятельности студентов;
- тесная связь теоретических положений и выводов с практикой и будущей профессиональной деятельностью студентов.

Лекция по теме должна завершаться обобщающими выводами.

Цель практических занятий состоит в выработке устойчивых навыков решения основных примеров и задач дисциплины, на которых основана теория лекционного курса.

Практические занятия проводятся по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы. Они могут быть построены как на материале одной лекции, так и на содержании обзорной лекции, а также по определённой теме без чтения предварительной лекции. Главная и определяющая особенность любого практического занятия – наличие элементов дискуссии, проблемности, диалога между преподавателем и студентами и самими студентами.

В конце практического занятия рекомендуется дать оценку всей работы, обратив особое внимание на следующие аспекты:

- качество подготовки;
- степень усвоения знаний;
- активность;
- положительные стороны в работе студентов;
- ценные и конструктивные предложения;
- недостатки в работе студентов;
- задачи и пути устранения недостатков.

По курсу практических занятий рекомендуется проведение контрольных работ и расчетно-графических домашних заданий, оценка которых осуществляется по пятибальной системе.

Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

При проведении итоговой аттестации студентов важно всегда помнить, что систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студентов. Проверка, контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. Знание критериев оценки знаний обязательно для преподавателя и студента.

8.2 Для студентов:

Студентам предлагается использовать указанную литературу и методические рекомендации, разработанные сотрудниками кафедры математического анализа ТГПУ для более прочного усвоения учебного материала, изложенного на лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы. Студентам необходимо выполнить индивидуальные задания по основным темам курса. Задания, вынесенные на самостоятельную работу, проверяются преподавателем в течение семестра. Оценки за индивидуальные задания и самостоятельную работу учитываются при выставлении оценок на экзаменах.

Целью самостоятельной работы, т.е. работы, выполняемой студентами во внеаудиторное время по заданию и руководству преподавателя является глубокое понимание и усвоение курса лекций и практических занятий, подготовка к выполнению контрольных работ, к выполнению семестрового задания, к сдаче зачета и (или) экзамена, овладение профессиональными умениями и навыками деятельности, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Для успешной подготовки и сдачи зачета (экзамена) необходимо проделать следующую работу:

- Изучить теоретический материал, относящийся к каждому из разделов.
- Выработать устойчивые навыки в решении типовых практических заданий.
- Выполнить контрольные работы, проводимые в течение семестра.

8.3. Перечень примерных вопросов для самостоятельной работы:

1. Мощность множества.
2. Сравнение мощностей. Теорема о мощности булеана данного множества.
3. Счетные множества и их свойства. Мощность множества рациональных чисел.
4. Континуум и его мощность. Свойства множеств мощности континуума. Множество действительных чисел.
5. Открытые множества и их структура.
6. Замкнутые множества и их структура.
7. Мера открытого множества и её свойства.
8. Мера замкнутого множества и её свойства.
9. Нульмерные множества. Примеры.
10. Мера Лебега ограниченного открытого и замкнутого множества.
11. Мера Лебега неограниченного линейного множества. Примеры.
12. Измеримые функции. Примеры. Лемма об измеримости множеств $A(f \le c)$, $A(f \ge c)$, $A(c \le f \le d)$.
13. Измеримость функции непрерывной на открытом множестве.
14. Измеримость функции непрерывной на замкнутом множестве.
15. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции.
16. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их свойства.
17. Теорема о существовании интеграла Лебега.
18. Интеграл Лебега от простых функций и его свойства.
19. Основные свойства интеграла Лебега.
20. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

8.4. Примерная тематика рефератов, курсовых работ:

1. Георг Кантор – создатель теории множеств.
2. История развития понятия функции.
3. Парадоксы Канторовской теории множеств.
4. Мощность бесконечного множества как обобщение количества элементов конечного множества.
5. Сравнение множеств по мощности, теорема Кантора-Бернштайна.
6. Полнота множества R действительных чисел.
7. Свойства плотности множества Q рациональных чисел во множестве R действительных чисел.
8. Булевы алгебры.
9. Отношения, их графики. Функции.
10. Отношения на множествах.

8.5. Вопросы к экзамену:

1. Счетные множества и их свойства.
2. мощность множества. Сравнение мощностей.
3. Теорема о существовании множеств сколь угодно высокой мощности.
4. Метрические пространства и их примеры.
5. Нормированные пространства и их примеры.
6. сходимость в метрическом пространстве.
7. Открытые и замкнутые множества и их свойства.
8. Производное множество.
9. Полнота метрических пространств.
10. Основные определения теории меры Лебега.
11. Измеримые множества и их свойства.
12. Признаки измеримости множества.
13. Измеримые функции и их свойства.
14. Функции Дирихле и Римана.
15. Интеграл Стилтьеса и его свойства.
16. Интеграл Лебега и его свойства.
17. Теорема о существовании интеграла Римана.
18. Связь интегралов Римана и Лебега.
19. Теорема о существовании интеграла Лебега.
20. Операторы и их примеры.
21. Функционалы и их примеры.
22. Метод последовательных приближений.
23. Теорема Банаха.
24. Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
25. Применение теоремы Банаха к решению систем алгебраических уравнений.

Программа дисциплины составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 010101.65 "Математика"

Программу составил:

доцент кафедры математического анализа ____________ /Тимошкин А.В./

Программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа. Протокол № 1 от 30 августа 2011 г.

Заведующий кафедрой
математического анализа ____________ /Лавров П.М.

Председатель методической комиссии ФМФ ТГПУ ____________ /Разина Г.К./

Согласовано:
декан физико-математического
факультета ТГПУ ____________ / Макаренко А.Н./