МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет» (ТГПУ)

УТВЕРЖДАЮ
Директор ЦФМиЕНО
Червонный М.А.
____
«30» января 2023 г.
М.П.

Центр дополнительного физико-математического и естественнонаучного образования

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к ОГЭ по математике»

Автор программы
Подстригич А.Г.,
доцент кафедры развития математического образования,
к.п.н.

Томск 2023 г.

Содержание

1. Паспорт программы

Аннотация программы	Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к ОГЭ по математике» направлена на подготовку обучающихся к Государственной итоговой аттестации в новой форме обязательного государственного экзамена (далее – ОГЭ) в 9 классе, а также на повышение уровня их математической подготовки, развитие у обучающихся творческих способностей при решении конкурсных задач более сложного уровня. Программа состоит из 7 модулей. Обучающийся вправе освоить как все модули, так и один или несколько модулей в соответствии со своими образовательными потребностями.
Направленность дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Естественнонаучная
Вид деятельности дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Математика
Категория обучающихся	9 класс (15-16 лет)
Срок обучения	72 часа
Форма обучения	Очная
Режим занятий	2 ак. часа в неделю
Ожидаемое минимальное и максимальное число обучающихся в одной группе	7-15
Категория состояния здоровья обучающихся, которые могут быть зачислены на обучение по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе	Без детей ОВЗ

2. Актуальность программы

Актуальность программы «Подготовка к ОГЭ по математике» обусловлена его практической значимостью. Обучающиеся могут применить полученные знания и практический опыт при сдаче ОГЭ, а в дальнейшем ЕГЭ. Данный курс так же поможет научить школьника технике работы с тестовыми заданиями и сдаче ОГЭ.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний по различным разделам, полученных учащимися за весь период обучения с 5 по 9 класс. Программа позволит систематизировать и углубить знания учащихся по различным разделам курса математики основной школы (арифметике, алгебре, статистике и теории вероятностей, геометрии). В данном курсе также рассматриваются нестандартные задания, выходящие за рамки школьной программы (графики с модулем, кусочно-заданные функции, решение нестандартных уравнений и неравенств и др.). Знание этого материала и умение его применять в практической деятельности позволит школьникам решать разнообразные задачи различной сложности и подготовиться к успешной сдаче экзамена в новой форме итоговой аттестации.

3. Цели и задачи

Организационно-педагогической целью образовательной программы «Подготовка к ОГЭ по математике» является создание условий, позволяющих подготовить учащихся к успешной сдаче итогового экзамена по математике за курс основного общего образования.

Дидактическая цель программы – содействовать развитию познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей обучающихся в процессе решения математических задач, расширение математического кругозора, совершенствование условий решать математические задачи.

Задачи:

- повторить и систематизировать знания обучающихся в области математики;
- закрепить алгоритмы решения математических задач;
- совершенствовать умения применять основные методы решения задач;
- изучить новые методы решения задач повышенной сложности;
- способствовать развитию интереса школьников к предмету математика.

4. Ожидаемые результаты освоения программы

- расширение знаний об основных алгоритмах решения задач, различных методах и приемах решения задач;
- развитие познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей на основе опыта самостоятельного решения задач разного вида, анализа и оценки новой информации;
- сознательное самоопределение ученика относительно профиля дальнейшего обучения или профессиональной деятельности;
- успешность написания ОГЭ по математике.

Обучающиеся, освоившие программу, должны знать:

- основные математические формулы, используемые в алгебраических задачах;
- основные формулы и теоремы планиметрии;
- сущность алгоритмического подхода в решении задач.

Обучающиеся, освоившие программу, должны уметь:

- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени и радикалы;
- решать рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, а также системы уравнений и неравенств;
- создавать математические модели;
- решать задачи с практическим содержанием;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических и алгебраических величин, применяя изученные математические формулы, уравнения и неравенства;
- решать планиметрические задачи;
- решать задания, по типу приближенному к заданиям ОГЭ.

Обучающие, освоившие программу, должны владеть навыками:

- самостоятельной математической и творческой деятельности по решению задач ОГЭ по математике;
- работы с информацией;
- группового взаимодействия;
- разработки и реализации математического исследования.

5. Учебный план

№ п/п	Наименование модулей и разделов	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	

1.	**Модуль 1.** Делимость чисел	4	1	3	Зачет
2.	**Модуль 2.** Декартовы координаты. Векторы на плоскости	4	1	3	Зачет
3.	**Модуль 3.** Числовые функции и последовательности	10	3	7	Зачет
4.	**Модуль 4.** Многочлены	10	4	6	Зачет
5.	**Модуль 5.** Уравнения и неравенства	12	3	9	Зачет
6.	**Модуль 6.** Геометрические фигуры и их свойства	16	3	13	Зачет
7.	**Модуль 7.** Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	16	4	12	Зачет
	ИТОГО	**72**	**19**	**53**	

6. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	**Модуль 1. Делимость чисел**	**4**	**1**	**3**	
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель	2	1	1	
1.2.	Числовые выражения	1	0	1	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
2.	**Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости**	**4**	**1**	**3**	
2.1.	Координаты и графики	2	1	1	
2.2.	Операции над векторами	1	0	1	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
3.	**Модуль 3. Числовые функции и последовательности**	**10**	**3**	**7**	
3.1.	Свойства функции	6	2	4	
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	3	1	2	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
4.	**Модуль 4. Многочлены**	**10**	**4**	**6**	
4.1.	Разложение многочлена на множители	5	2	3	
4.2.	Преобразование выражений	4	2	2	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
5.	**Модуль 5. Уравнения и неравенства**	**12**	**3**	**9**	

5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	3	1	2	
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	4	1	3	
5.3.	Системы уравнений и неравенств	4	1	3	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
6.	**Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства**	**16**	**3**	**13**	
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	3	1	2	
6.2.	Площади фигур	6	1	5	
6.3.	Задачи на построение	6	1	5	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
7.	**Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей**	**16**	**4**	**12**	
7.1.	Текстовые задачи	8	2	6	
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	7	2	5	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
	ИТОГО	**72**	**19**	**53**	

7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Содержание обучения
Модуль 1. Делимость чисел		
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное	Теория: десятичная система счисления. Делимость натуральных чисел. Практика: простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Нахождение наибольшего общего делителя (далее – НОД) и наименьшего общего кратного (далее – НОК). Деление с остатком.
1.2.	Числовые выражения	Теория: модуль (абсолютная величина) числа. Практика: сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий. Понятие об иррациональном числе. Сравнение действительных чисел. Проценты. Пропорции. Округление чисел.
Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости		
2.1.	Координаты и графики	Теория: геометрический смысл модуля. Практика: решение задач геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические

		представления. Прочтение графиков и диаграмм. Составление уравнений прямых и парабол по заданным условиям. Построение графиков с двумя переменными.
2.2.	Операции над векторами	Теория: вектор, длина (модуль) вектора. Практика: операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.
Модуль 3. Числовые функции и последовательности		
3.1.	Свойства функции	Теория: построение графиков изученных функций, их исследование. Практика: построение более сложных графиков функций (кусочно-заданных, с «выколотыми» точками и т.п.).
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	Теория: понятие числовых последовательностей. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Практика: решение задач с применением формул n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сложные проценты.
Модуль 4. Многочлены		
4.1.	Разложение многочлена на множители	Теория: понятие многочлена. Практика: сложение, вычитание, умножение многочленов. Разложение многочленов на множители с использованием нескольких способов.
4.2.	Преобразование выражений	Теория: способы преобразования выражений. Практика: многошаговые преобразования целых и дробных выражений (применяя широкий набор изученных алгоритмов). Действия с алгебраическими дробями. Рациональные выражения и их преобразования.
Модуль 5. Уравнения и неравенства		
5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	Теория: виды уравнений. Практика: решение систем линейных уравнений и систем, содержащих нелинейные уравнения, способами подстановки и сложения. Решение линейных неравенств с одной переменной и их систем, требующих алгебраических преобразований. Решение квадратных неравенств и систем, включающих квадратные неравенства.
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	Теория: приемы и техники решения уравнений и неравенств с параметром. Практика: решение задач, связанных с исследованием неравенств и систем, содержащих буквенные коэффициенты.
5.3.	Системы уравнений и неравенств	Теория: уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными. Практика: система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и

		алгебраическим сложением. Решение простейших нелинейных систем.
Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства		
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	Теория: основные понятия, символика. Практика: способы оформления решения геометрических задач.
6.2.	Площади фигур	Теория: формулы вычисления площадей фигур. Практика: решение задач.
6.3.	Задачи на построение	Теория: задачи на построение Практика: решение задач на построение.
Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей		
7.1.	Текстовые задачи	Теория: текстовые задачи Практика: решение задач арифметическими способами рассуждений, алгебраическим методом (составление выражений, уравнений, систем).
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	Теория: знакомство со спецификой комбинаторных и вероятностных задач. Практика: решение задач.

8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

Для обеспечения программы необходимы: аудиторный фонд, мультимедийный комплекс, USB-модем, флеш-карта, видеоматериал, наглядные пособия, дидактический материал.

Рекомендуемая литература:

1. Балаян, Э. Н. Комплексные упражнения по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам (с решениями). 7–11 классы / Э. Н. Балаян. – Москва : Феникс, 2016. – 224 с.
2. Балаян, Э. Н. Математика. Справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Э. Н. Балаян. – Москва : Высшая школа, 2015. – 320 с.
3. Балаян, Э. Н. Математика. Справочное пособие для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Э. Н. Балаян. – Москва : Огни, 2015. – 304 с.
4. Балаян, Э. Н. Новые олимпиадные задачи по математике для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 5-11 классы / Э.Н. Балаян. – Москва : Наука, 2015. – 320 с.

9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса

Основные формы организации обучения: проведение лекций (проблемных и традиционных); практических занятий (коллективные формы обсуждения, круглые столы, мозговые штурмы, работа в микрогруппах – решение проблемных ситуаций, моделирование, защита решений), различные формы самостоятельной работы, промежуточные аттестации обучающихся, консультации и т.д.

Самостоятельная работа обучающихся предполагает различные формы индивидуальной учебной деятельности: конспектирование научной и учебно-методической литературы, сбор и анализ практического материала, ведение словаря, проектирование, выполнение тематических исследовательских заданий и пр. Выбор форм и видов самостоятельной работы определяются индивидуально-личностным и компетентностным подходом к обучению совместно преподавателем и обучающимся.

10. Формы учебной работы

Фронтальная, индивидуальная и групповая работа.

11. Формы контроля

11.1. Формы текущего контроля успеваемости промежуточной аттестации

Текущий контроль успеваемости осуществляется на занятиях на основе наблюдений за деятельностью учащихся в ходе занятий.

Промежуточной аттестацией по итогам освоения каждого модуля является зачёт в форме тестирования, где учащимся предлагается ответить на вопросы теста, проверочной работы (решение тренировочных заданий ОГЭ).

Примерные вопросы теста по модулю «Делимость чисел»:

Вопрос 1. Какие числа делятся на 3?
А) Все числа, оканчивающиеся цифрой 3;
Б) Все числа, сумма цифр которого делится на 3;
В) Все числа, оканчивающиеся на 3, 6 или 9;
Г) Все числа, оканчивающиеся нечетной цифрой.

Вопрос 2. Выберите ряд, в котором все числа делятся на 5:
А) 25360, 215, 9845, 67351;
Б) 34795, 54540, 12345, 214;
В) 1295, 360, 84965, 2225;
Г) 3451, 39798, 948, 680.

Вопрос 3. Какие цифры можно подставить в число *8658 вместо*, чтобы полученное число делилось на 9?
А) 0 и 9;
Б) 0;
В) 9;
Г) нет верного ответа.

Вопрос 4. Какое число является НОК чисел 8, 12 и 6?
А) 24;
Б) 576;
В) 48;
Г) 2.

Вопрос 5. Какие числа являются взаимно простыми?
А) 5 и 25;
Б) 9 и 99;
В) 81 и 13;
Г) 12 и 16.

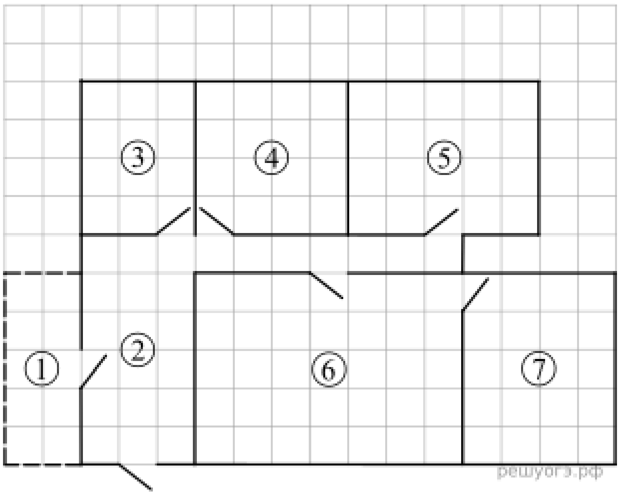
Критерии оценивания:
85 - 100 % правильных ответов – высокий уровень;
70 - 84% правильных ответов – повышенный уровень;
50 - 69% правильных ответов – средний уровень;
менее 50 % правильных ответов – низкий уровень.

Высокий, повышенный и средний уровень прохождения теста свидетельствуют об освоении материала программы.

Пример проверочной работы в формате ОГЭ.

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на схеме. Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырех цифр.

Объекты	Балкон	Детская комната	Кабинет	Кухня
Цифры				



На плане изображена схема квартиры (сторона каждой клетки на схеме равна 1 м). Вход и выход осуществляются через единственную дверь.

При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Напротив входа в квартиру располагается совмещенный санузел, а справа от него — детская комната.

Гостиная занимает наибольшую площадь в квартире, из гостиной можно попасть в кабинет. В конце коридора находится кухня площадью 20 м^2.

Пол в гостиной планируется покрыть паркетной доской длиной 1 м и шириной 0,25 м.

В квартире проведены газопровод и электричество.

Решение. При входе в квартиру расположен коридор, отмеченный цифрой 2. Слева от него расположен балкон. Значит, балкон отмечен цифрой 1. Напротив входа в квартиру располагается совмещенный санузел, а справа от него — детская комната, следовательно, детская комната отмечена на схеме цифрой 4. Гостиная занимает наибольшую площадь в квартире, из гостиной можно попасть в кабинет, поэтому кабинет отмечен цифрой 7. В конце коридора находится кухня площадью 20 м^2, значит, кухня отмечена цифрой 5.

Ответ: 1475

2.

Паркетная доска продается в упаковках по 8 шт. Сколько упаковок с паркетной доской требуется купить, чтобы покрыть пол в гостиной?

Решение. Заметим, что чтобы покрыть паркетной доской 1 м^2 пола, требуется 4 доски. Найдем площадь гостиной:

$$7 \cdot 5 = 35 \text{ м}^2.$$

Значит, требуется $35 \cdot 4 = 140$ досок. Следовательно, требуется $\frac{140}{8} = 17,5$ упаковок с паркетной доской. Таким образом, необходимо купить 18 упаковок.

Ответ: 18

3. Найдите площадь коридора (коридором считается площадь квартиры, не занятая комнатами или балконом). Ответ дайте в квадратных метрах.

Решение. Сторона одной клетки равна 1 м. Значит, площадь коридора равна:

$$3 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 25 \text{ м}^2.$$

Ответ: 25

4. Найдите расстояние d между противоположными углами детской комнаты в метрах. В ответ запишите $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Решение. Найдем расстояние d между противоположными углами детской комнаты по теореме Пифагора:

$$\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Таким образом, получаем ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4.$

Ответ: 4

5. Хозяин квартиры планирует установить в квартире плиту для готовки. Он рассматривает два варианта: газовая плита или электроплитка. Цены на плиты, данные о потреблении и тарифах оплаты даны в таблице.

	Цена	**Сред. расходгаза /сред. потребл.мощность**	**Стоимость газа /электро-энергии**
Газовая плита	44 680 руб.	1,4 куб. м/ч	6 руб./куб. м
Электроплитка	21 000 руб.	5,8 кВт	4 руб./(кВт · ч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовую плиту. Через сколько часов непрерывного использования экономия от использования газовой плиты вместо электрической компенсирует разность в стоимости установки газовой плиты и электроплитки?

Решение. Разница в стоимости покупки газовой плиты и электроплитки равна $44\,680-21\,000\;=\;23\,680$ руб. Час использования газовой плиты стоит $1{,}4\cdot 6\;=\;8{,}4$ руб. Час использования электроплитки стоит $5{,}8\cdot 4\;=\;23{,}2$ руб. Разница в стоимости составляет $23{,}2-8{,}4\;=\;14{,}8$ руб. Значит, экономия от использования газовой плиты вместо электроплитки компенсирует разность в стоимости установки газовой и электрической плит через $\frac{23680}{14,8}=1600$ часов.

Ответ: 1600

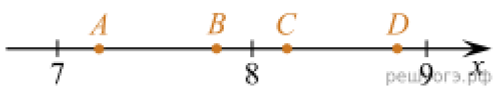
6. Найдите значение выражения $\frac{5}{6}-\frac{3}{14}.$ Представьте результат в виде несократимой обыкновенной дроби. В ответ запишите числитель этой дроби.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{14}=\frac{5\cdot 7-3\cdot 3}{14\cdot 3}=\frac{26}{14\cdot 3}=\frac{13}{21}.$$

Ответ: 13

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}.$



Какая это точка?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) точка A

2) точка B

3) точка C

4) точка D

Решение. Возведем в квадрат числа $\sqrt{77}$,7, 8, 9:

$$\sqrt{77}^2 = 77, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81.$$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке D.

Правильный ответ указан под номером 4.

Ответ: 4

8. Найдите значение выражения $5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22}$.

Решение. Упростим выражение, разложив подкоренные выражения на множители и вынесем за знак корня полные квадраты чисел:

$$5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22} = 5 \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 11} =$$
$$= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 220.$$

Ответ: 220

9. Решите уравнение $3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4$.

Решение. Последовательно получаем:

$$3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x + x + x = 1 + 4 - 5 - 5 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1

10. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5?

Решение. Чисел от 15 до 29 — 15 штук. Среди них на 5 делится только 3 числа. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5 равна $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$

Ответ: 0,2.

Примечание.

Фраза от «*M* до *N*» подразумевает, что и *M*, и *N* включаются в диапазон. Количество чисел в указанном диапазоне можно найти по формуле $N - M + 1$. Фраза «число делится на *k*» подразумевает, что число делится на *k* без остатка. Такие соглашения используются в сборниках для подготовки к экзаменам во всех задачах подобного типа.

Ответ: 0,2

11. Установите соответствие между функциями и их графиками.

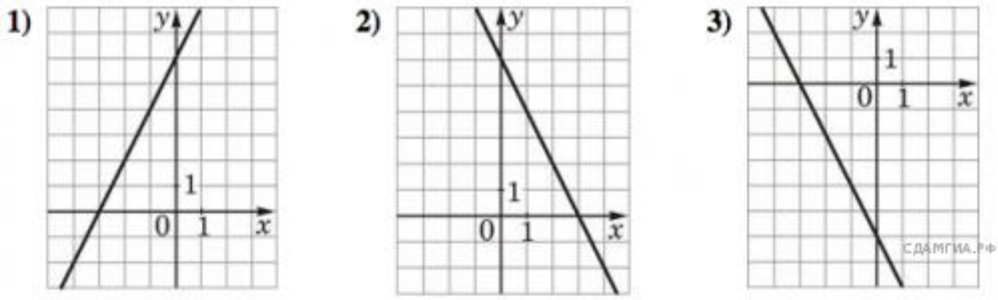
ФУНКЦИИ

А) $y = 2x + 6$

Б) $y = -2x - 6$

В) $y = -2x + 6$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

Решение. Напомним, что если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то: при $k > 0$, тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс положителен.

Уравнение $y = 2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 1).

Уравнение $y = -2x - 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке -6. Ее график изображен на рисунке 3).

Уравнение $y = -2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 2).

Тем самым, искомое соответствие: А — 1, Б — 3, В — 2.

Ответ: 132

12. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец.

Решение. Подставим в формулу значение переменной n:

$$C = 6000 + 4100 \cdot 5 = 26500.$$

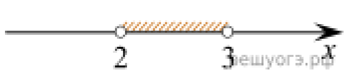
Ответ: 26500

13. Решите неравенство: $\dfrac{x-2}{3-x} \geqslant 0$

На каком из рисунков изображено множество его решений?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1)



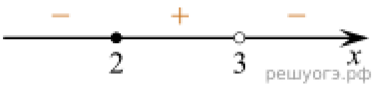
2)

3)

4)

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x-2}{3-x} \geqslant 0.$$



Получаем $x \in [2;\ 3)$.

Правильный ответ указан под номером 3.

Ответ: 3

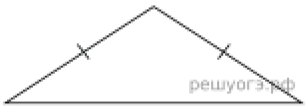
14. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение. Пусть бригада в первый день покрасила a_1метров забора, во второй — $a_2, \ldots$, в последний — a_nметров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$м, а за *n* дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n$$ метров забора.

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8.$Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8

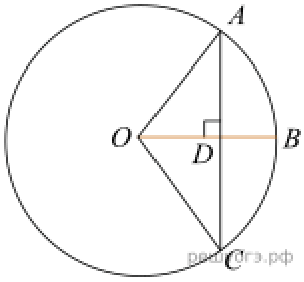
15.  Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}.$Угол, лежащий напротив основания равен 120°. Найдите длину боковой стороны.

Решение. Пусть длина боковой стороны равна $a.$Площадь треугольника можно найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 120^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin 120^\circ}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 196\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Ответ: 28

16. 

Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

Решение. Найдем отрезок DO: $DO = OB - BD = 5 - 1 = 4$. Так как OB перпендикулярен AC, треугольник AOD — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{25-16} = 3.$ Треугольник AOC — равнобедренный так как $AO = OC = r$, тогда $AD = DC$. Таким образом, $AC = AD \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6

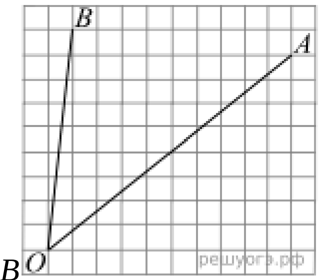
17. Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π, угол сектора равен 120°, а радиус круга равен 9. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Решение. Площадь сектора равна $S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha,$ имеем:

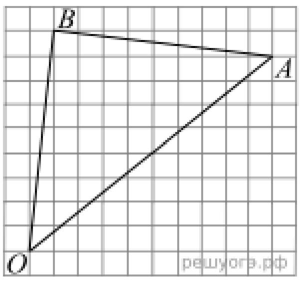
$$S = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

Ответ: 27

18.



Найдите тангенс AOB



Решение. Найдем каждую из сторон треугольника AOB, чтобы показать, что он прямоугольный.

$$OB = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

$$OA = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}$$

Таким образом, $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{OB} = 1$$

Ответ: 1

19. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.

3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.

1) «Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны» — *неверно*: такого признака равенства треугольников нет.

2) «Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям» — *верно*, по теореме о средней линии трапеции она параллельна основаниям и равна их полусумме.

3) «Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов» — *верно*, для того, чтобы существовал треугольник, сумма любых его двух сторон должна быть больше третьей стороны.

Ответ: 23

20. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$.

Решение. Найдем значение выражения:

$$\frac{p(a)}{p(6-a)} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{6-a-3}{(6-a)(6-(6-a))} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{-a+3}{(6-a)a} = -1.$$

Ответ: −1.

21. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от A. Найдите скорость пешехода, шедшего из A, если известно, что он шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из B, и сделал в пути получасовую остановку.

Решение. Пусть скорость пешехода, шедшего из пункта A, равна x км/ч, $x > 1$. Тогда скорость пешехода, шедшего из пункта B, равна $(x-1)$ км/ч.

Составим таблицу по данным задачи:

Скорость, км/ч Время, ч Расстояние, км

Пешеход, шедший из *A*	x	$\frac{9}{x}$	9
Пешеход, шедший из *B*	$x-1$	$\frac{10}{x-1}$	10

Так как пешеход, шедший из *A*, сделал по пути остановку на $\frac{1}{2}$ ч., а вышли пешеходы одновременно, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-1}-\frac{9}{x}=\frac{1}{2}\underset{x>1}{\Leftrightarrow}20x-18(x-1)=x(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,\\x=6\end{array}\right.\underset{x>1}{\Leftrightarrow}x=6.$$

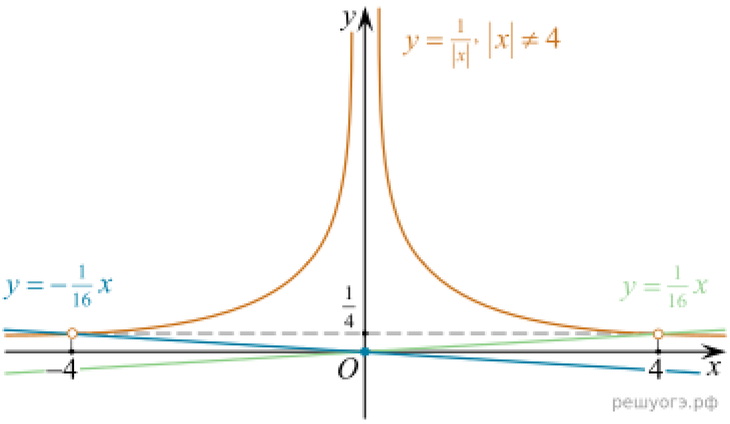
Ответ: 6 км/ч.

22. Постройте график функции $y=\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях *k* прямая $y=kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение. Преобразуем выражение: $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}=\frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)}=\frac{1}{|x|}$ при $|x|\neq 4.$

Значит, $y=\begin{cases}\frac{1}{|x|}, \text{ если } x\neq\pm 4,\\ \text{не определена при } x=-4 \text{ или } x=4.\end{cases}$

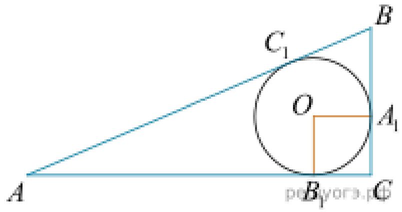
Построим ветвь гиперболы $y=\frac{1}{x}$ при $x>0$ и удалим точку $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y=kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4;\ \frac{1}{4}\right)$. Этим случаям соответствуют значения $k=0,\ k=-\frac{1}{16}$ и $k=\frac{1}{16}.$

Ответ: $0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}.$

23. В треугольнике ABC угол C равен 90°, радиус вписанной окружности равен 3. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 15$.



Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим r. Тогда $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника ABC равен $2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r$. Полупериметр p равен $AB + r$.

По формуле площади треугольника находим

$$S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = (15 + 3) \cdot 3 = 54.$$

Ответ: 54.

Другое решение.

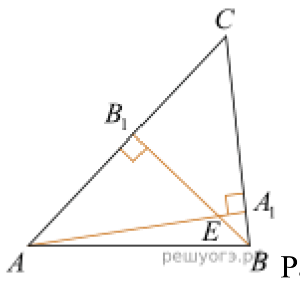
Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Пусть $AC_1 = AB_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$. Тогда $AC = x + r$, $BC = y + r$, $AB = x + y$. Учитывая, что $r = 3$ и $x + y = 15$, по теореме Пифагора получим

$$(x+3)^2 + (15 - x + 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Следовательно, один из катетов треугольника равен $9 + 3 = 12$, второй катет равен $6 + 3 = 9$, и площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54.$$

24. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



Решение. Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1, они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$.

Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB, углы AEB и B_1EA_1 равны как вертикальные, из предыдущей пропорции $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

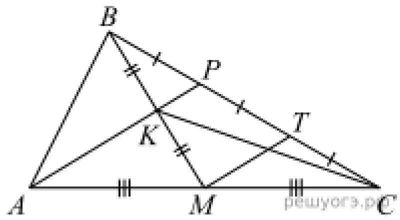
См. также.

Аналогичное задание с тупоугольным треугольником: 340854.

Примечание.

Увидеть угол AA_1B_1 будет легче, если соединить точки A_1 и B_1.

25. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$.



Решение. Проведем отрезок MT, параллельный AP. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CKB равна $3S$ и равна площади треугольника CMK (треугольники имеют одну высоту, проведенную из вершины C, и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK.

Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$.

Ответ: 0,6.