МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
(ТГПУ)

Утверждаю
__________ А.Н. Макаренко
декан ФМФ
« 31 » августа 2011 года

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б.3.В.13 «АЛГЕБРА»

ТРУДОЁМКОСТЬ – 15 зачётных единиц

Направление подготовки: **050100.62 – педагогическое образование**

Профиль подготовки: **Информатика и Математика**

Степень выпускника – **бакалавр педагогического образования**

Пояснительная записка

Настоящая программа по дисциплине «Алгебра» составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 050100.62 – педагогическое образование.

Программа по курсу «Алгебра» рассчитана на 540 часов, из которых 204 часа отводится на аудиторные занятия, 255 часов – на самостоятельную работу, 81 час – на подготовку к экзамену.

Изложение учебного материала в данном курсе строится на уровне строгости, принятой в настоящее время в современной математике. Рассматриваемые в этом курсе определения, теоремы и задачи призваны обеспечить ясное представление об универсальности таких основных идей математики, как идеи линейности и аксиоматичности. Изложение всех разделов курса «Алгебра» сопровождается приведением большого числа примеров, решением достаточного количества задач и упражнений. Для её успешного освоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования. Изучение курса рассчитано на 4 семестра. В конце 1-го семестра проводится итоговый контроль в форме зачёта, а в конце 2-го, 3-го и 4-го семестров – в форме экзамена.

1. Цели изучения дисциплины:

1.1. *Цели*:
- формирование представления о месте и роли математики в современной науке;
- развитие логического мышления и способности оперировать абстрактными объектами, овладение техникой математических рассуждений и доказательств;
- формирование первичных навыков научного исследования и самостоятельной работы.

1.2. *Задачи*:
- изучение основных понятий теории множеств;
- изучение основных правил и понятий комбинаторики, доказательство формулы бинома Ньютона;
- изучение элементов теории чисел;
- знакомство с основными алгебраическими структурами;
- изучение элементов теории матриц и определителей;
- исследование систем линейных уравнений;
- знакомство с теорией линейных пространств;
- изучение свойств линейных отображений;
- изучение теории многочленов.

2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы.

Данная дисциплина относится к вариативной части профессионального цикла. Она является неотъемлемой частью профессионального математического образования студента. Дисциплина «Алгебра» логически связана с дисциплинами: «Элементарная математика» (обоснование элементарной математики с точки зрения высшей), «Методика обучения математике» (обоснование математических приёмов решения заданий), «Математический анализ» (тема «Отображения»), «Теория вероятностей и математическая статистика» (тема «Комбинаторика»), «Теория чисел» (тема «Отношение делимости», «Отношение сравнимости»), «Математическая логика» (тема «Алгебраические системы» как примеры аксиоматических теорий), «Теория множеств» (тема «Элементы теории множеств»), «Геометрия» (тема «Векторные пространства»), «Теория функций комплексного переменного» (тема «Комплексные числа»), «Дискретная математика и математическая логика» (тема «Бинарные отношения»), «Преподавание в классах с углубленным изучением математики», «Решение олимпиадных задач по математике».

Для освоения данной дисциплины требуются математические знания, полученные в курсе средней школы.

Дисциплины, для успешного усвоения которых требуется изучение дисциплины «Алгебра» приведены выше.

3. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения курса студент должен приобрести знания и компетенции, соответствующие уровню подготовки бакалавра, и включающие в себя:

Знания:
- знание основных понятий теории множеств;
- знание основных правил и понятий комбинаторики;
- знание элементов теории чисел;
- знание основных алгебраических структур;
- знание элементов теории матриц и определителей;
- умение исследовать системы линейных уравнений;

- знание теории линейных пространств;
- знание свойств линейных отображений;
- знание теории многочленов.

Компетенции:

- владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу и восприятию информации (ОК 1);
- способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности (ОК 4);
- способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК 6);
- осознание социальной значимости своей будущей профессии (ОПК 1);
- владение основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, аксиоматическим методом (ПК 1);
- владение культурой математического мышления (ПК 2);
- способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности (ПК 3);
- способность пользоваться построением математических моделей для решения практических задач (ПК 4);
- владение содержанием и методами элементарной математики, умение анализировать элементарную математику с точки зрения высшей математики (ПК 5).

4. Общая трудоемкость дисциплины 12 зачетных единиц и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Трудоемкость (в соответствии с учебным планом) (час)	Семестры			
	468	1	2	3	4
Аудиторные занятия	204 (в том числе в интеракт. – 42)	57 (в том числе в интеракт. – 12)	54 (в том числе в интеракт. – 12)	57 (в том числе в интеракт. – 12)	36 (в том числе в интеракт. – 6)
Лекции	93	38	18	19	18
Практические занятия	111	19	36	38	18
Семинары					
Лабораторные работы					
Другие виды аудиторных работ					
Другие виды работы					
Самостоятельная работа	255	70	70	70	45
Курсовой проект (работа)					
Реферат					
Расчетно-графические работы					
Формы текущего контроля					
Вид промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом	81	зачёт	Экзамен 27	Экзамен 27	Экзамен 27

5. Содержание учебной дисциплины

5.1. Разделы учебной дисциплины.

№	Наименование раздела дисциплины	**Виды учебной работы (час)** (в соответствии с учебным планом)			
		Всего часов	Лекции	ПЗ	Самост. работа

1-й семестр					
1.	Элементы теории множеств	16	6		10
2.	Элементы комбинаторики	14	4		10
3.	Бинарные отношения	18	8		10
4.	Отображения	18	6	2	10
5.	Мощность множеств	14	2	2	10
6.	Элементы теории делимости	20	4	6	10
7.	Элементы теории сравнений	27	8	9	10
2-й семестр					
8.	Основные алгебраические системы	28	4	10	14
9.	Поле комплексных чисел	22	2	6	14
10.	Алгебра матриц	22	4	4	14
11	Теория определителей	22	4	4	14
12.	Исследование систем линейных уравнений	30	4	12	14
3-й семестр					
13.	Линейные пространства	39	6	10	23
14.	Кольцо многочленов от одной неизвестной	41	6	12	23
15.	Теория делимости в кольце многочленов	47	7	16	24
4-й семестр					
16.	Теория сравнений в кольце многочленов и расширения полей	27	6	6	15
17.	Распределение корней многочлена	23	4	4	15
18.	Линейные операторы	31	8	8	15
ИТОГО:		540	93	111	255

5.2. Содержание разделов дисциплины

№	Тема	Содержание
1	Элементы теории множеств	Понятие множества. Числовые множества. Пустое множество, универсальное множество. Подмножество. Равенство множеств. Метод математической индукции. Булеан множества. Операции над множествами: пересечение, объединение, разность, дополнение. Свойства операций.
2	Элементы комбинаторики	Перестановки, размещения, сочетания. Правило произведения. Вывод формул для вычисления количества перестановок, размещений, сочетаний. Бинома Ньютона.
3	Бинарные отношения	Декартово произведение множеств. Понятие бинарного отношения (б. о.). Операции над бинарными отношениями: пересечение, объединение, разность, дополнение, инверсия, произведение. Свойства б.о.: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Отношение эквивалентности. Понятие разбиения. Теоремы о связи между разбиениями и эквивалентностями. Отношение порядка. Линейно упорядоченное и

		частично упорядоченное множества. Наибольший и наименьший; максимальный и минимальный элементы.
4	Отображения	Понятие отображения. Образ и прообраз. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Произведение (композиция) отображений. Свойства операции произведения. Теорема о произведении инъективных и сюръективных отображений. Тождественное (единичное) отображение. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
5	Мощность множеств	Понятие равномощности множеств. Конечные и бесконечные множества. Основная теорема о конечных множествах. Примеры счётных множеств. Пример множества, не являющегося счётным. Теорема Кантора.
6	Элементы теории делимости	Отношение делимости и его свойства. Алгоритм Евклида. Каноническое разложение целых чисел. Теорема Евклида. НОД и НОК чисел. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
7	Элементы теории сравнений	Определение сравнимости целых чисел по модулю m и его простейшие свойства. Признаки делимости. Множество классов вычетов. Операции на этом множестве. Полная и приведённая система вычетов. Функция Эйлера. Теоремы Ферма и Эйлера. Сравнение первой степени с одним неизвестным.
8.	Основные алгебраические системы	Бинарная алгебраическая операция и её свойства. Нейтральный и симметричный элементы. Алгебраическая система. Изоморфизм алгебраических систем: определение и простейшие свойства. Группы, определение и примеры. Группа подстановок. Циклическая группа. Подгруппа. Критерий подгруппы. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальный делитель. Фактор-группа. Кольца, определение и примеры. Простейшие свойства кольца. Делители нуля.. Подкольцо, критерий подкольца. Поле, определение и примеры. Характеристика поля. Простейшие свойства поля. Подполе, критерий подполя.
9.	Поле комплексных чисел	Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма записи. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи. Сопряжённое число. Циклическая мультипликативная группа с образующим элементом i. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Их геометрическая интерпретация. Формула Муавра и

		следствие из неё. Теорема об извлечении корней n-ой степени из комплексного числа z. Группа корней n-ой степени из 1.
10.	Алгебра матриц	Определение матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами и их свойства. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Определение обратной матрицы, её свойства.
11.	Теория определителей	Определители второго и третьего порядков. Определение определителя (детерминанта) n-го порядка. Перестановки и подстановки. Инверсия. Член и знак определителя n-ого порядка. Свойства определителя n-ого порядка. Минор и его алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа и её следствия. Вырожденные и невырожденные матрицы.
12.	Исследование систем линейных уравнений	Система из n линейных уравнений с n неизвестными. Обратная матрица. Критерий обратимости матриц. Правило Крамера. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы и её следствие. Элементарные преобразования матриц. Алгоритмы вычисления ранга матрицы. Условие совместности системы линейных уравнений. Однородная система. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
13.	Линейные пространства	Определение и примеры линейных пространств. Базис и размерность линейного пространства. Линейное подпространство. Линейная оболочка. Преобразование координат при преобразовании базиса n-мерного линейного пространства. Евклидовы пространства.
14.	Кольцо многочленов с одной переменной	Построение кольца многочленов с одной переменной. Старший член и степень многочлена. Схема Горнера и теорема Безу. Число корней многочлена в коммутативной области целостности.
15.	Теория делимости в кольце многочленов	Делимость в кольце. Ассоциированные многочлены. Неразложимые многочлены. Деление с остатком. НОД многочленов. Свойства взаимно простых многочленов. Неприводимые многочлены. Каноническое разложение над полем **R** и над полем **C**. Многочлены с целыми коэффициентами. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Редукция многочленов с целыми коэффициентами по числовому модулю. Задача о приводимости многочлена над полем **Q**. Редукционный признак неприводимости многочлена. Признак неприводимости Эйзенштейна.
16.	Теория сравнений в кольце многочленов и расширения полей	Кольцо вычетов по многочлену. Простое расширение поля. Алгебраическое и трансцендентное расширения поля.
17.	Распределение корней многочлена	Распределение вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами. Теорема Штурма.
18.	Линейные операторы	Понятие линейного оператора. Основные свойства. Матричная запись линейных операторов. Собственные значения и собственные векторы

		линейных операторов. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве.

5.3. Лабораторный практикум
Не предусмотрен

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины
6.1. Основная литература по дисциплине:

1. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории : учебное пособие / [В. Ю. Вдовин, Л. В. Михалева, В. М. Мухина и др.]. – СПб. : Лань, 2008. – 185 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – Изд. 11-е, испр. – М.: Физматлит, 2007. – 159 с.

6.1. Дополнительная литература:

1. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – 2-е изд. – М.: Издательство МГУ, 2002. – 319 с.
2. Ким Г. Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи: Учебное пособие / Г. Д. Ким, Л. В. Крицков; Под ред. В. А. Ильина. - М.: Зерцало. Т. 1. – 2003. – 430 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры :учебное пособие для вузов / А. Г. Курош. – Изд. 17-е, стереотип. –СПб. [и др.]: Лань, 2008. – 431 с.
4. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА – М, 2007. – 279 с.
5. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. – 2-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2002. – 415 с.

6.3. Средства обеспечения освоения дисциплины

1. Математический интернет-портал «Вся математика»: http://www.allmath.ru .
2. Интернет-тест по математике: http://www.mathtest.ru

6.4. Материально-техническое обеспечение дисциплины
Не предусмотрено

7. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

7.1. Методические рекомендации преподавателю
Данный курс реализуется посредством чтения лекций, проведения практических занятий и консультаций. С целью выработки у студентов навыков самостоятельной работы с литературой, некоторые вопросы излагаются в обзорном порядке. Предполагается, что отдельные выводы и доказательства будут проведены самостоятельно, с последующим отчетом на консультации.

7.2. Методические рекомендации для студентов
Студентам рекомендуется после лекции самостоятельно прорабатывать полученный материал, отмечая непонятные места. С вопросами нужно обращаться к преподавателю на консультации или следующей лекции. После каждого практического занятия студенты получают домашнее задание, обязательное для выполнения. Выполнение домашних и самостоятельных работ влияет на оценку на экзамене.

8. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

8.1. Тематика рефератов.
Не предусмотрено.
8.2. Вопросы и задания для самостоятельной работы.

1-й семестр

1. Докажите ассоциативность операции пересечения над множествами:
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
2. Докажите дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. Докажите закон де-Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. Сформулируйте определения теоретико-множественных операций над бинарными отношениями, заданными на множестве A.
5. Докажите, что если в упорядоченном множестве существуют наименьший элемент, то он единственный.
6. Докажите, что диагональ Δ_A множества A является и эквивалентностью, и отношением порядка.
7. Приведите примеры счётных подмножеств множества **N**.

2-й семестр

1. Являются следующие операции бинарными алгебраическими на **Z**:

а) $a * b = -3(a + b)$;	**б**) $a * b = $ ОД$\{a, b\}$;
в) $a * b = $ НОД$\{a, b\}$;	**г**) $a * b = \max\{a, b\}$;
д) $a * b = ½\,(a + b)$;	**е**) $a * b = a^b$.

2. Являются следующие операции бинарными алгебраическими на **N**:

а) $a * b = -3(a + b)$;	**б**) $a * b = a - b$;
в) $a * b = 3a + 2b$;	**г**) $a * b = \max\{a, b\}$;
д) $a * b = $ НОК$\{a, b\}$;	**е**) $a * b = a + a^b$.

3. Являются ли сложение и умножение бинарными алгебраическими операциями на множестве $\{1, 2, 3\}$?

4. Дано множество элементов $a + \sqrt{6}b$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, с операцией $\cdot$ (умножение). Тогда элемент, симметричный $5 + 2\sqrt{6}$ равен: $-5 + 2\sqrt{6}$; $5 - 2\sqrt{6}$; $-5 - 2\sqrt{6}$; нет симметричного.

5. Дана мультипликативная группа $\langle G, \cdot\rangle$. Тогда верными являются утверждения:

А) Операция умножения ассоциативна;

Б) Все элементы, кроме нейтрального, имеют обратный;

В) Операция, обратная к умножению не выполнима в G;

Г) Во множестве G существует элемент, у которого нет обратного;

Д) операция умножения коммутативна;

Е) Во множестве G существует нейтральный элемент – нуль.

6. Запишите элементы подгруппы H симметрической группы S_4, которая состоит из подстановок, отвечающих всем самосовмещениям квадрата. Является ли она циклической?

7. Выпишите все подгруппы группы H из задания 6. Какие из них являются циклическими?

8. Решите уравнения:

а) в группе S_3: $\tau_3 \circ x = \tau_5$;

б) в алгебраической системе $\langle \mathbf{Z}_6, \cdot\rangle$: $\overline{4}x = \overline{3}$;

в) в алгебраической системе $\langle \mathbf{Z}_6, \cdot\rangle$: $\overline{5}x = \overline{3}$.

9. Найдите фактор-группу группы $\langle \mathbf{Z}, +\rangle$ по подгруппе $\langle 4\mathbf{Z}, +\rangle$.

10. Докажите, что алгебраическая система $\langle 2^U, \Delta, \cap\rangle$ является кольцом. Укажите делители нуля данного кольца.

11. Выпишите все подкольца кольца $\langle \mathbf{Z}_{12}, +, \cdot\rangle$.

12. Докажите, что алгебраическая система $\langle \mathbf{Q}, \oplus, \otimes\rangle$, где $x \oplus y = x + y - 1$ и $x \otimes y = x + y - xy$, является полем.

3-й семестр

1. Являются линейными пространствами:

а) **Z** над полем **R**; б) **C** над полем **R**; в) **R** над полем **C**.

2. Выясните, какие из систем векторов являются линейно зависимыми.

а) **a** = (2, 3, 5), **b** = (–2, –3, –5); б) **a** = (2, 3, 5), **b** = (–2, –3, –6);

в) **a** = (2, 3, 5), **b** = (2, 3, 5), **c** = (–2, –3, –6)

г) **a** = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, **b** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) **a** = 3$i$, **b** = i; е) **a** = 2 + 3i, **b** = 0.

3. Выразите один из векторов каждой системы через другие.

а) **a** = 3i, **b** = ½; **c** = –4 – 6i;

б) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 3x$, $f_3(x) = ½x^2$, $f_4(x) = 2 + x + x^2$.

4. Покажите, что системы векторов линейно независимы.

а) **a** = (1, 1, 1), **b** = (1, 2, 3), **c** = (1, 3, 3);

б) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) **a** = 1 + 2i, **b** = 2 + i;

г) $f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $f_2(x) = 1 – x + x^2 – x^3$, $f_3(x) = 2 + 3x + x^2 + 4x^3$.

5. Покажите, что каждая система является базисом $\mathbf{R}^3$.

а) $\mathbf{e_1}$ = (1, 2, 1), $\mathbf{e_2}$ = (2, 3, 3), $\mathbf{e_2}$ = (3, 7, 1);

б) $\mathbf{e_1}$ = (3, 1, 4), $\mathbf{e_2}$ = (5, 2, 1), $\mathbf{e_2}$ = (1, 1, –6);

в) $\mathbf{e_1}$ = (0, 1, λ), $\mathbf{e_2}$ = (λ, 0, 1), $\mathbf{e_2}$ = (λ, 1, λ).

6. Найдите все базисы следующих систем векторов.

а) **a** = (1, 1), **b** = (1, 2), **c** = (1, 3);

б) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$;

г) **a** = 3i, **b** = ½; **c** = –4 – 6i; д) **a** = –1 + 2i, **b** = 1 – 2i; **c** = ½ – i;

е) $f_1 = 2$, $f_2 = x – 2x^2$, $f_3 = –2x + 4x^2$.

7. Покажите, что в пространстве многочленов степени ≤ 2 (над **R**) система векторов $f_1 = 1$, $f_2 = 2 + 3x – x^2$, $f_3 = –1 + 2x + x^2$ является базисом.

8. Линейно независимую систему векторов $f_1 = –2 + x – x^2$, $f_2 = 3 + x + 2x^2$ вещественного пространства многочленов степени ≤ 2 дополните до базиса этого пространства.

9. В пространстве $\mathbf{R}^4$ систему векторов **a** = (1, 2, 3, 4), **b** = (4, 1, 2, 3) дополните до базиса этого пространства.

10. При каких значениях параметра λ система векторов (5, 1, 2, 3), (1, 2, –1, 1), (4, –1, λ, 0), (3, λ, 4, –1) является базисом пространства $\mathbf{R}^4$?

11. Дополните вектор 2 + 3i до базиса линейного пространства **C** над полем **R**.

12. Выразите вектор **b** = (2, –3, 5) через систему векторов $\mathbf{a_1}$ = (1, 1, 0), $\mathbf{a_2}$ = (0, 1, 1), $\mathbf{a_2}$ = (1, 0, 2).

13. Найдите все базисы и размерность линейного пространства матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ с элементами поля $\mathbf{Z_2}$ вычетов по модулю 2.

14. Покажите, что при любых значениях α, β, γ система векторов (1, α, β), (0, 1, γ), (0, 0, 1) является базисом пространства $\mathbf{R}^3$.

15. Найти сумму и произведение многочленов.

а) $f(x) = 2 + (1 + i)x – 3ix^2$; $g(x) = –2ix + ix^3 + x^4 \in \mathbf{Z}[i][x]$;

б) $f(x) = 2 + x – 3x^3 + 4x^4$; $g(x) = 3 – 6x + 2x^3 \in \mathbf{Z}_7[x]$.

16. Используя схему Горнера, разделить многочлен $f(x)$ на $(x – a)$:

а) $\mathbf{Z}_7[x]$: $f(x) = 3x^3 + 6x^2 – 2$, $a = 2$;

б) $\mathbf{Z}_{11}[x]$: $f(x) = 7x^4 – 9x^3 + 8x^2 + 10x – 6$, $a = –3$.

17. Используя схему Горнера, найти $f(a)$:

а) $\mathbf{Z}_5[x]$: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$, $a = 3$;
б) $\mathbf{Z}_7[x]$: $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 + 4x - 3$, $a = -2$.
18. Пользуясь схемой Горнера, составить таблицу значений $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - 1 \in \mathbf{Z}_7[x]$ и найти его корни.
19. В кольце $\mathbf{Z}_p[x]$ найти многочлен $g(x)$ меньшей степени, эквивалентный многочлену $f(x)$.
а) $f(x) = 4x^9 - 3x^7 + 2x^6 + 3x^3 - 3x^2 - x - 1$, $p = 5$;
б) $f(x) = 2x^{35} - 6x^{15} + 2x^8 - 3x^5 + x + 5$, $p = 11$;
в) $f(x) = -2x^{29} + 5x^{28} + 7x^{18} + 2x^{17} - 4x^{16} + 4x^{15} + 6x^6 - 4x^3 - 3x^2 - 8x + 2$, $p = 13$.

4-й семестр

1. Определите количество вещественных корней следующих многочленов. Укажите количество отрицательных и положительных корней:
а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$.
2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе.
$$\frac{10\sqrt[3]{2} - 10}{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2}$$
3. Разложите на неприводимые множители многочлены $f_1(x) = x^3 + x + 1$ и $f_2(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$ над полем $\mathbf{Z}_2$.
4. Разложите многочлен $x^4 + 1$ на неприводимые множители над полями **C** и **R**.
5. По данным простым корням: 1, –1, i постройте многочлены наименьшей степени над полями **C** и **R**.
6. Найдите целые корни многочлена $60x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
7. Докажите неприводимость многочлена
$2x^5 - 15x^3 + 21x - 24$.
8. Пользуясь определением, докажите, что число
$\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ – алгебраическое.
Линейные операторы
1. Рассмотрим следующие отображения φ_i линейного вещественного пространства $\langle \mathbf{R}, +, \circ\rangle$ в себя:
а) $\varphi_1(x) = x^3$; **б)** $\varphi_2(x) = \sin x$; **в)** $\varphi_3(x) = \lg x$.
Будут ли эти отображения линейными?
2. Пусть φ_i – отображения пространства $\langle \mathbf{R}^2, +, \circ\rangle$ в пространство $\langle \mathbf{R}^3, +, \circ\rangle$. Будут ли эти отображения линейными? Будут ли эти отображения инъективными и сюръективными?
а) $\varphi_1((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_1)$;
б) $\varphi_2((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_1+x_2)$;
в) $\varphi_3((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_1x_2)$.
3. Пусть $\langle P_n, +, \circ\rangle$ – пространство многочленов, степени не выше n. Покажите, что отображение D: $P_n \to P_n$, определённое правилом: $Df = f'$ является линейным оператором.
4. *Задание линейного оператора*.
Пусть задан некоторый линейный оператор $\hat{A}$, пространства
а) $\langle \mathbf{R}^2, +, \circ\rangle$, который переводит базисные вектора (0, 1) и (1, 1) в (2, 3) и (4, 6) соответственно. Куда этот оператор переведёт вектор (3, 4)?
б) $\langle P_2, +, \circ\rangle$, который переводит базисные многочлены x^2, $2x$ и 1 в x, $2x + 1$ и $-x^2 + x$ соответственно. Куда этот оператор переведёт многочлен $2x^2 - 2x + 1$?
в) $\langle M_2, +, \circ\rangle$, который переводит базисные матрицы
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ в
$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

соответственно. Куда этот оператор переведёт матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

г) $\langle \mathbf{C}, +, \cdot_{\mathbf{R}} \rangle$, который переводит базисные вектора i и $1 + i$ в $2i$ и $4i$ соответственно. Куда этот оператор переведёт число $3 + 4i$?

5. Для линейных операторов, встретившихся в задании 2 и 4, найти их матрицы (в задании 2 – в ортогональном базисе, в 4-ом – в указанных в задании базисах).

6. Выясните, существует ли линейный оператор $\hat{A}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, переводящий векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ соответственно в векторы $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, и найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$

а) $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$, $\mathbf{a_2} = 3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $\mathbf{b_1} = 6\mathbf{e_1} + 9\mathbf{e_2}$, $\mathbf{b_2} = 11\mathbf{e_1} - 8\mathbf{e_2}$,

б) $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$, $\mathbf{a_2} = 2\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2}$, $\mathbf{b_1} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $\mathbf{b_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

7. В пространстве $\langle M_2, +, \cdot \rangle$ зафиксирован базис: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Запишите в этом базисе:

а) матрицу оператора транспонирования;

б) матрицу оператора $f_A = AX$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

в) матрицу оператора $g_A = XA$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

8. Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$Найдите его матрицу в базисе $\mathbf{a_1} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $\mathbf{a_2} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$.

9. Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе: $\mathbf{a_1} = 2\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a_2} = 3\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a_3} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e}_3$.

8.3. Вопросы для самопроверки.
Не предусмотрено.

8.4. Примеры тестов.
Не предусмотрено.

8.5.Перечень вопросов для промежуточной аттестации (к экзамену, зачёту):

Перечень вопросов к зачёту (1-й семестр).

1. Способы задания множества. Достоинства и недостатки каждого способа. Примеры различных множеств. Подмножество. Пустое и универсальное множество. Теорема о пустом множестве, как подмножестве. Булеан множества. Равенство множеств. Теорема о количестве элементов в булеане конечного множества.
2. Операции над множествами. Примеры. Свойства операций. Доказательство закона дистрибутивности операции объединения относительно операции пересечения. Доказательство законов де-Моргана.
3. Декартово произведение множеств ***A*** и ***B***, декартов квадрат множества ***A***. Лемма о количестве элементов в декартовом произведении множеств ***A*** и ***B***. Привести примеры, изобразить на координатной плоскости. Случай, когда декартово произведение пусто. Операции над декартовыми произведениями.
4. Бинарные отношения. Примеры. Равенство бинарных отношений. Операции над бинарными отношениями: теоретико-множественные, инверсия и произведение.
5. Свойства операции произведения бинарных отношений. Докажите ассоциативность операции произведения бинарных отношений. Докажите: $(\alpha\circ\beta)^{-1} = \beta^{-1}\circ\alpha^{-1}$.
6. Свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Примеры. Критерий рефлексивности б.о. Критерий симметричности б.о. Критерий транзитивности б.о.

7. Эквивалентность и разбиение. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Примеры. Теорема о разбиении множества $\boldsymbol{A}$ по эквивалентности, заданной на $\boldsymbol{A}$.
8. Отношение порядка. Примеры. Частично упорядоченное множество. Сравнимость элементов. Линейно упорядоченное множество. Наибольший и наименьший элементы. Лемма о наибольшем (наименьшем) элементе. Максимальный и минимальный элементы. Возможное количество наибольших, наименьших, максимальных и минимальных элементов. Примеры. Связь между наибольшим и максимальным элементами, между наименьшим и минимальным элементами.
9. Отображение. Образ и прообраз. Примеры. Равные отображения. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры. Произведение отображений. Примеры, обозначения. Свойства операции произведения. Теорема о произведении инъективных и сюръективных отображений.
10. Тождественное отображение. Лемма об умножении тождественного отображения на отображение $f\colon X \to Y$ (слева и справа).
11. Обратное отображение. Примеры. Критерий обратимости отображения.
12. Перестановки, сочетания, размещения. Различие этих понятий. Формулы для их вычислений (с доказательством).
13. Свойства сочетаний (с доказательством). Бином Ньютона.
14. Равномощные множества. Примеры. Лемма об отношении равномощности.
15. Конечные и бесконечные множества. Основная теорема о конечных множествах. Счётные множества. Множества мощности континуума.
16. Теорема Кантора. Континуум-гипотеза.
17. Определение делимости и простейшие свойства этого отношения.
18. Деление с остатком. Теорема о делении с остатком.
19. Наибольший общий делитель и его свойства (с доказательством).
20. Алгоритм Евклида.
21. Взаимно простые числа и их свойства (с доказательством).
22. Простые числа и их свойства (с доказательством). Теорема Евклида.
23. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение целых чисел.
24. Наименьшее общее кратное и его свойства (с доказательством).
25. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
26. Отношение сравнения целых чисел. Критерий сравнения целых чисел. Отношение сравнения как отношение эквивалентности.
27. Свойства сравнений (с доказательством).
28. Признаки делимости. Обобщённый признак делимости Паскаля.
29. Классы вычетов по модулю m. Операции на множестве классов вычетов.
30. Полная и приведённая системы вычетов.
31. Функция Эйлера. Определение и вывод формулы.
32. Теоремы Эйлера и Ферма.
33. Решение сравнений первой степени с одним неизвестным.

Перечень вопросов к экзамену (2-й семестр).

1. Бинарная алгебраическая операция и её свойства.
2. Нейтральный и симметричный элементы относительно операции. Теоремы об единственности нейтрального и симметричного элементов.
3. Группа. Определение и примеры. Порядок группы, порядок элемента группы. Группа подстановок.
4. Изоморфизм групп.
5. Подгруппа. Критерий подгруппы
6. Циклическая подгруппа произвольной группы, образующий элемент.
7. Левостороннее разложение группы по подгруппе. Индекс подгруппы в группе. Теорема Лагранжа.

8. Нормальный делитель. Фактор группа.
9. Кольцо. Определение и примеры. Простейшие свойства кольца.
10. Подкольцо. Критерий подкольца.
11. Поле. Определение и примеры. Характеристика поля. Простейшие свойства поля.
12. Подполе. Критерий подполя.
13. Построение поля комплексных чисел.
14. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи.
15. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
16. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.
17. Теорема об извлечении корней n-ой степени из комплексного числа z.
18. Группа корней n-ой степени из 1.
19. Матрицы. Операции над ними и их свойства.
20. Определитель n-го порядка. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
21. Свойства определителей. Разложение определителя по строке (столбцу).
22. Миноры и алгебраические дополнения.
23. Обратная матрица.
24. Решение матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.
25. Линейная зависимость системы векторов.
26. Критерий линейной зависимости.
27. Ранг матрицы.
28. Критерий совместности системы линейных уравнений.
29. Исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.
30. Исследование систем линейных уравнений методом Крамера.

Перечень вопросов к экзамену (3-й семестр).

1. Определение и примеры линейных пространств.
2. Базис и размерность линейного пространства.
3. Линейное подпространство. Линейная оболочка.
4. Преобразование координат при преобразовании базиса n-мерного линейного пространства.
5. Евклидовы пространства.
6. Построение кольца многочленов от одной переменной. Старший член и степень многочлена.
7. Схема Горнера и теорема Безу.
8. Число корней многочлена в коммутативной области целостности.
9. Делимость в кольце. Ассоциированные многочлены. Неразложимые многочлены.
10. Деление с остатком. НОД многочленов.
11. Свойства взаимно простых многочленов.
12. Неприводимые многочлены. Каноническое разложение над полем **R** и над полем **C**.
13. Многочлены с целыми коэффициентами.
14. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.
15. Редукция многочленов с целыми коэффициентами по числовому модулю.
16. Задача о приводимости многочлена над полем **Q**.
17. Редукционный признак неприводимости многочлена.
18. Признак неприводимости Эйзенштейна.

Перечень вопросов к зачёту (4-й семестр).

1. Кольцо вычетов по многочлену.
2. Простое расширение поля.
3. Алгебраическое и трансцендентное расширения поля.

4. Распределение вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами.
5. Теорема Штурма.
6. Понятие линейного оператора. Примеры.
7. Основные свойства.
8. Матричная запись линейных операторов.
9. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.
10. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве.

8.6. Темы для написания курсовой работы.

Не предусмотрено.

8.7. Формы контроля самостоятельной работы.

Студенты сдают самостоятельную работу на консультациях.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки **050100.62 – педагогическое образование,** степень **- бакалавр педагогического образования.**

Рабочая программа учебной дисциплины составлена:
К.ф.-м.н., доцент кафедры математики,
теории и методики обучения математике _______________ Е.А. Фомина

Рабочая программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры математики, теории и методики обучения математике,
протокол № 1 от « 31 » августа 2011 г.

Зав. кафедрой _______________ Э.Г. Гельфман

Рабочая программа учебной дисциплины одобрена методической комиссией физико-математического факультета
протокол № 9-1 от « 31 » августа 2011 г.

Председатель методической комиссии _______________ Г.К.Разина